Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2019/20

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Es seien $w, z \in \mathbb{C}$ zwei komplexe Zahlen und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

a) Beweisen Sie folgende Formel:

$$\begin{aligned} \frac{z^n - w^n}{z - w} &= z^{n-1} + z^{n-2}w + z^{n-3}w^2 + \cdots + z\,w^{n-2} + w^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} . \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie: Die Funktion $f(z) = z^n$ ist komplex differenzierbar und es gilt $f'(z) = n\,z^{n-1}$. Benutzen Sie dazu die Formel aus (a).

c) Folgern Sie aus (a): Es gilt die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-2} + z^{n-1} + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} .$$

d) Folgern Sie schliesslich aus Teil (c): Für $|z| < 1$ gilt die folgende Formel für die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1}{1-z}$$

Dies ist eine der wichtigsten Formeln in der gesamten Mathematik. Wir werden sie sehr häufig in dieser Vorlesung benutzen.

2.Aufgabe: Es seien $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei komplex differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie:

a) Das Produkt fg ist komplex differenzierbar und es gilt die übliche Produktregel

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

b) Die Hintereinanderschaltung $(f \circ g)(z) = f(g(z))$ ist komplex differenzierbar und es gilt die übliche Kettenregel

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))\, g'(z)$$

c) Der Quotient f/g ist komplex differenzierbar und es gilt die übliche Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$$

Die Beweise können Sie direkt aus dem Reellen, aus der Analysis 1, übertragen.

..bitte wenden

3.Aufgabe: Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Funktionen und zeigen Sie, dass sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen:

a) $f(z) \; = \; z^2$

b) $f(z) \; = \; z^3$

c) $f(z) \; = \; e^z \; = \; e^{x+iy} \; = \; e^x \, e^{iy}$

d) $f(z) \; = \; \frac{1}{z} \; = \; \frac{1}{x+iy}$.

4.Aufgabe: Beweisen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) \; := \; |z|^2$$

ist komplex differenzierbar an der Stelle $z_0 = 0$, aber nirgendwo sonst. An der Stelle $z_0 = 0$ können Sie dazu direkt den Limes des Differenzen-Quotienten berechnen und für $z_0 \neq 0$ können Sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen betrachten.

5.Aufgabe: Überprüfen Sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für die folgenden Funktionen und entscheiden Sie dann, welches f komplex differenzierbar ist:

a) $f(z) \; = \; y + ix$

b) $f(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2)$

c) $f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy$

Dabei sei $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$, also $z = x + iy$.

6.Aufgabe: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) \in \mathbb{R}$ eine beliebig oft reell-differenzierbare Funktion. Wir definieren $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$z = x + iy \; \to \; h(z) \;\; := \;\; f(x)$$

Ist dieses h komplex differenzierbar?