Hochschule RheinMain WS 2019/20
Prof. Dr. D. Lehmann

11. Übungsblatt zur Vorlesung
Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Bestimmen Sie die Taylorreihen für folgende Funktionen $f(z)$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ auf möglichst einfache Art und Weise:

a) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

b) $f(z) = \frac{1+z^4}{1+z^2}$

c) $f(z) = \sqrt{1+z}$

d) $f(z) = (1+z)^{100}$

e) $f(z) = \arctan(z)$

Geben Sie jeweils den Konvergenzradius der Potenzreihe an.

2.Aufgabe: In dieser Aufgabe wollen wir die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \quad = \quad \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x}\, dx \quad = \quad \pi$$

mit Hilfe komplexer Integration beweisen. Wir betrachten dazu die Funktion

$$f(z) \quad := \quad \frac{e^{iz}}{z}$$

die wir entlang des folgenden positiv orientierten geschlossenen Weges

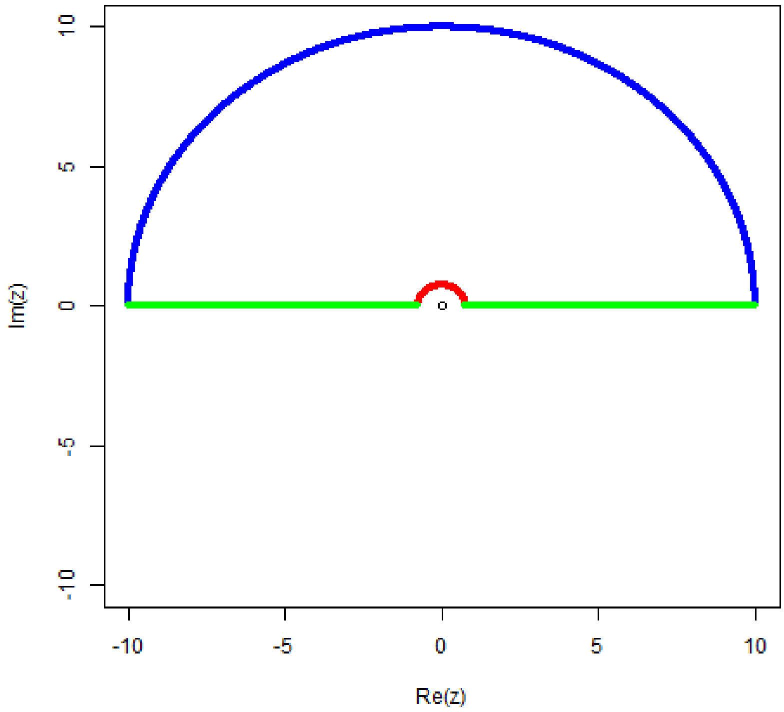
$$C \quad = \quad C_{\text{grün}} \; + \; C_{\text{blau}} \; + \; C_{\text{rot}}$$

integrieren wollen, mit

$$\begin{aligned} C_{\text{blau}} &= C_R^+, \text{ positiv orientierter Halbkreis mit Radius } R \\ C_{\text{rot}} &= C_\varepsilon^-, \text{ negativ orientierter Halbkreis mit Radius } \varepsilon \end{aligned}$$

wie im folgenden Bild:

..bitte wenden..



Zeigen Sie dann:

a) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx \;=\; -\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \;-\; \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon^-} \frac{e^{iz}}{z}\, dz$$

b) Zeigen Sie jetzt mit Hilfe einer numerischen R-Simulation: Es gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \;=\; 0 \tag{1}$$

und

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon^-} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \;=\; -i\pi \tag{2}$$

Berechnen Sie dazu das Integral

$$\int_{C_r^+} \frac{e^{iz}}{z}\, dz$$

numerisch für die Werte $r \in \{0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000\}$.

c) Versuchen Sie schliesslich, die Grenzwerte (1) und (2) theoretisch zu beweisen. Bei (2) ist das einfach, bei (1) etwas schwieriger. Sie können aber anstatt des blauen Halbkreises auch etwa ein ‘dreiviertel’ Rechteck nehmen, von R über $R + iR$ und $-R + iR$ nach $-R$, und für diesen Integrationsweg ist der Limes (1) einfacher zu beweisen.