Hochschule RheinMain | WS 2019/20
Prof. Dr. D. Lehmann

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Es bezeichne $K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ den positiv orientierten Kreis mit Radius r um $z_0 \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchy'schen Integralformel:

a) $\frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(0)} \frac{\sin z}{z} \, dz$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(0)} \frac{\sin z}{z^2} \, dz$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(0)} \frac{\sin z}{z^3} \, dz$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(0)} \frac{\sin z}{z^4} \, dz$

b) $\frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(0)} \frac{1}{z \cos z} \, dz$

c) $\frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(1)} \frac{1}{1-z^2} \, dz$

d) $\frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(1)} \frac{1}{(1-z^2)^2} \, dz$

e) $\frac{1}{2\pi i} \int_{K_2(1)} \frac{\sqrt{4+z}}{z} \, dz$

f) $\frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(3i/2)} \frac{\mathrm{Log}(z)}{z-i} \, dz$.

Dabei seien die Wurzel und der Logarithmus in (e) und (f) jeweils durch den Hauptzweig, d.h. durch die Standard-Definition, gegeben.

2.Aufgabe: Wir betrachten folgende einfach geschlossenen, positiv orientierten Kurven in der komplexen Ebene: C_1 ist das Rechteck mit Eckpunkten 0, 2i, 2i-3, -3. C_2 ist das Dreieck mit Eckpunkten 0, 2, 2i. Und C_3 ist der Kreis mit Radius 3 mit Mittelpunkt bei 1-i. Skizzieren Sie C_1, C_2 und C_3 in der komplexen Ebene und berechnen Sie dann die Wegintegrale

$$\int_{C_1} f(z) \, dz \, , \qquad \int_{C_2} f(z) \, dz \, , \qquad \int_{C_3} f(z) \, dz$$

auf möglichst einfache Weise:

a) $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$, $\quad z_0 = -2 + i$

b) $f(z) = \frac{z}{z-z_0}$, $\quad z_0 = 1 + \frac{i}{2}$

c) $f(z) = \frac{z}{(z-z_0)^2}$, $\quad z_0 = \frac{1-i}{2}$

d) $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^2}$, $\quad z_0 = \frac{1-i}{2}$

..bitte wenden

3.Aufgabe: Numerischer Test der Cauchy'sche Integralformel: Die Cauchy'sche Integralformel lautet:

$$f(z_0) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \tag{1}$$

wobei C eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve in der komplexen Ebene ist, f ist komplex differenzierbar im Inneren von C und einer Umgebung des Randes und z_0 liegt im Inneren von C.

a) Finden Sie heraus, wie man in der R-Software benutzerdefinierte Funktionen anlegen kann. Definieren Sie dann die Funktion $f(z) := e^{-z^2}$ in R und geben Sie ihr den Buchstaben `f`, dieser Buchstabe ist noch nicht verbraucht (der Buchstabe `t` etwa ist schon für das Transponieren von Matrizen verbraucht). Testen Sie Ihre Funktion, indem Sie den Befehl `f(1i)` eingeben. Als Resultat sollten Sie dann also die Eulersche Zahl, in komplexer Darstellung, `2.718282+0i`, bekommen.

b) Codieren Sie jetzt eine Funktion

```
TestCauchyInt = function( f , z0 , r )
```

die zwei Zahlen in einem Vektor zurückgibt: die erste Zahl soll das numerisch berechnete Integral (1) sein, wobei der Weg C ein Kreis mit Radius r um z_0 sein soll. Die zweite Zahl soll das exakte Resultat $f(z_0)$ sein. Sie können dazu etwa das folgende Code-Fragment als Vorlage benutzen:

```
# Wir wollen die Cauchy'sche Integralformel
# ueberpruefen: die Kurve C ist ein Kreis
# mit Radius r um z0:
# Die Funktion soll zwei Werte zurueckgeben,
# das Integral und f(z0):

TestCauchyInt = function( f , z0 , r )
{
  n = 10000
  phi = seq(from=0,to=2*pi,length=n)
  z = ...
  dz = ...
  ...
  integral =   ...    * 1/(2*pi*1i)
  exact = ...
  result = c(integral,exact)
  names(result) = c("Integral","f(z0)")
  return(result)
}
```

Schauen Sie sich auch nochmal die Lösung der Aufgabe 3 vom Übungsblatt 8 an, dort haben wir ja schon komplexe Wegintegrale numerisch berechnet. Ein Funktionsaufruf sollte dann in etwa folgendes Resultat produzieren:

```
> TestCauchyInt(f,z0=1i,r=2)
          Integral                 f(z0)
2.718282-0.000854i 2.718282+0.000000i
>
```