Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2019/20

Probe-Klausur zur Vorlesung Komplexe Funktionen

(nächste Woche gibt es noch ein 12.Übungsblatt zum Residuensatz)

Theorie-Teil: Aufgaben 1-5: 70 Punkte
Programmier-Teil: Aufgaben 6-8: 30 Punkte

1.Aufgabe (15Punkte): Elementare Rechenregeln und Funktionen:

a) Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $a + ib$ mit geeignetem Realteil a und Imaginärteil b:

a1) $e^{\frac{17\pi i}{2}}$ **a2)** $(1-i)^2(1+i)^2$ **a3)** $(-i)^{53}$

a4) $\cos\big(\pi + i\log 2\big)$ **a5)** $\mathrm{Log}_{(-\pi,\pi]}(-ie^2)$

b) Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in Polardarstellung $re^{i\varphi}$ mit geeignetem Radius r und Winkel φ:

b1) $\dfrac{1}{1+i}$ **b2)** -1 **b3)** $i^{20} + i^{21}$

2.Aufgabe (10Punkte): Komplexe Differenzierbarkeit:

a) Es sei $v(x, y) = x^2 - y^2$. Kann dieses v der Imaginärteil einer komplex-differenzierbaren Funktion sein ?

b) Es sei $f(z) = f(x + iy) = y^2 + ix^2$. Ist dieses f komplex differenzierbar an der Stelle $z_0 = -2 + i$?

3.Aufgabe (15Punkte): Reihen:

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k^2(2z)^k$.

b) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\big(\frac{1+i}{3}\big)^{n+1}$ und geben Sie das Resultat in der Form $a + ib$ an.

c) Bestimmen Sie die Taylorreihenentwicklung von $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ an der Stelle $z_0 = 0$.

4.Aufgabe (15Punkte): Weg-Integrale:

a) Es sei $C_1^+(i)$ der positiv orientierte Kreis um $z_0 = i$ mit Radius 1. Berechnen Sie folgendes Wegintegral (etwa mit Hilfe der Cauchy'schen Integralformel oder mit Hilfe des Residuensatzes)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+(i)} \frac{dz}{z^4 - 1}$$

b) Es sei $K_{-1,-i}(0)$ der gerichtete Kreisbogen um 0 mit Radius 1, der von -1 nach $-i$ geht. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{K_{-1,-i}(0)} \frac{dz}{\bar{z}}$$

wobei $\bar{z} = x - iy$ im Nenner das komplex Konjugierte von $z = x + iy$ ist.

5.Aufgabe (15Punkte): Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

b)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\sin\theta}$$

Programmier-Teil: Aufgaben 6-8

(Theorie-Teil muss vorher abgegeben werden)

6.Aufgabe (10Punkte): Berechnen Sie den Wert der Reihe aus Aufgabe 3b,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1+i}{3})^{n+1}$$

numerisch in R, indem Sie die ersten 1000 oder 1001 Terme der Reihe aufaddieren.

7.Aufgabe (10Punkte): Berechnen Sie die folgenden Integrale aus Aufgabe 4a und 4b numerisch mit Hilfe einer R-Simulation. Wählen Sie etwa jeweils $n = 50000$ Terme für die Riemannsche Summe:

a)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1^+(i)} \frac{dz}{z^4 - 1}$$

b)

$$\int_{K_{-1,-i}(0)} \frac{dz}{\bar{z}} \ .$$

8.Aufgabe (10Punkte): Erstellen Sie einen Plot, der alle Nullstellen der Funktion $f(z) = z^4 - 1$ und den Kreis $C_1^+(i)$ aus Aufgabe 4a, den positiv orientierten Kreis um $z_0 = i$ mit Radius 1, in einem Diagramm darstellt.