Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2019/20

Lösungen 9. Übungsblatt Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Alle angegebenen Funktionen sind in einer Umgebung von γ_{z_0,z_1} komplex differenzierbar, so dass alle Integrale gemäss

$$\int_{\gamma_{z_0,z_1}} f(z)\,dz \;=\; F(z_1) \;-\; F(z_0)$$

berechnet werden können, wobei F eine Stammfunktion von f ist, also $F'(z) = f(z)$ in einer Umgebung von γ_{z_0,z_1}.

a) $f(z) = z^2, \quad z_0 = 1 + i, \quad z_1 = 2 + i \;\Rightarrow\; F(z) = z^3/3$ und damit

$$\begin{aligned} F(z_1) \;-\; F(z_0) &= \frac{1}{3}\Big[(2+i)^3 - (1+i)^3\Big] \\ &= \frac{1}{3}\Big[8 + 3\times 4i + 3\times 2(-1) - i - [1 + 3i + 3(-1) - i]\Big] \\ &= \frac{1}{3}\Big[8 + 12i - 6 - i - 1 - 3i + 3 + i\Big] \\ &= \frac{4+9i}{3}\,. \end{aligned}$$

b) $f(z) = \cos z, \quad z_0 = -i, \quad z_1 = 1 + i \;\Rightarrow\; F(z) = \sin z$ und damit

$$\begin{aligned} F(z_1) \;-\; F(z_0) &= \sin(1+i) - \sin(-i) \\ &\underset{\text{Blatt6,Aufg2d}}{=} \sin 1 \cosh 1 + i \sinh 1 \cos 1 + \sin i \\ &= \sin 1 \cosh 1 + i[\sinh 1 \cos 1 + \sinh 1]\,. \end{aligned}$$

c) $f(z) = e^z, \quad z_0 = \log 2, \quad z_1 = i\pi/2 \;\Rightarrow\; F(z) = e^z$ und damit

$$F(z_1) \;-\; F(z_0) \;=\; e^{i\pi/2} - e^{\log 2} \;=\; i - 2\,.$$

d) $f(z) = z\,e^z, \quad z_0 = -1 - i\pi/2, \quad z_1 = 2 + i\pi$:

Da für komplexe Funktionen ebenfalls die Produktregel gilt, gilt auch die Umkehrung davon, $f(z)g(z) = \int f'(z)g(z)dz + \int f(z)g'(z)dz$, so dass wir eine Stammfunktion mit partieller Integration finden können:

$$\int ze^z dz \;=\; ze^z - \int 1e^z \;=\; ze^z - e^z \;=\; (z-1)e^z \;=\; F(z)$$

Damit:

$$\begin{aligned} F(z_1) \;-\; F(z_0) &= (1+i\pi)e^{2+i\pi} - (-2 - i\pi/2)e^{-1-i\pi/2} \\ &= -(1+i\pi)e^2 + i(-2 - i\pi/2)e^{-1} \\ &= -e^2 + \tfrac{\pi}{2e} - i[\pi e^2 + 2/e]\;. \end{aligned}$$

e) $f(z) = z\,\cos z, \quad z_0 = 0, \quad z_1 = i$

$$\int z\cos z dz \;=\; z\sin z - \int 1\sin z \;=\; z\sin z + \cos z \;=\; F(z)$$

und damit

$$\begin{aligned} F(z_1) \;-\; F(z_0) &= i\sin i + \cos i - \cos 0 \\ &= -\sinh 1 + \cosh 1 - 1 \;=\; e^{-1} - 1\;. \end{aligned}$$

f) $f(z) = \mathrm{Log}(z), \quad z_0 = 1, \quad z_1 = 1 + i$

$$\begin{aligned} \int \mathrm{Log}(z)dz &= \int 1 \times \mathrm{Log}(z)dz \\ &= z\,\mathrm{Log}(z) - \int z\,\tfrac{1}{z}\,dz \\ &= z\,\mathrm{Log}(z) - z \;=\; F(z) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} F(z_1) \;-\; F(z_0) &= (1+i)\mathrm{Log}(1+i) - 1 - i - [\mathrm{Log}(1) - 1] \\ &= (1+i)[\log\sqrt{2} + i\tfrac{\pi}{4}] - 1 - i + 1 \\ &= \log\sqrt{2} - \pi/4 + i[\log\sqrt{2} + \pi/4 - 1]\;. \end{aligned}$$

2.Aufgabe: Eine Parametrisierung des Kreises $K_r(z_0)$ ist gegeben durch

$$z(\varphi) \;=\; z_0 + r\,e^{i\varphi}\,, \quad \varphi \in [0, 2\pi]\;.$$

Damit erhalten wir für ganzahlige, positive oder negative, Werte von $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \int_{K_r(z_0)} (z - z_0)^n \, dz &= \int_0^{2\pi} \big[z(\varphi) - z_0 \big]^n \, \frac{dz}{d\varphi} \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (\, r \, e^{i\varphi} \,)^n \, ir \, e^{i\varphi} \, d\varphi \\ &= i \, r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} \, d\varphi \end{aligned} \tag{1}$$

Für $n \neq -1$ können wir das letzte Integral wie folgt berechnen:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} \, d\varphi \;=\; \frac{1}{i(n+1)} \, e^{i(n+1)\varphi} \Big|_0^{2\pi} \;=\; \frac{1}{i(n+1)} \left[e^{i(n+1)2\pi} - e^0 \right] \;=\; 0 \, .$$

Und für $n = -1$ ist offensichtlich

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} \, d\varphi \;=\; \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \;=\; 2\pi \, .$$

Also insgesamt:

$$\int_{K_r(z_0)} (z - z_0)^n \, dz \;=\; \begin{cases} 2\pi \, i & \text{falls } \; n = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

da der Vorfaktor r^{n+1} in der Gleichung (1) für $n = -1$ gleich 1 ist.