

Lösungen 8. Übungsblatt Komplexe Funktionen

1. Aufgabe: Wir parametrisieren die Wege:

$$\begin{aligned}\gamma_{\text{red}}(t) &= z_0 + t(z_1 - z_0) = 1 + i + t(-1 + i - 1 - i) = 1 + i - 2t, \quad t \in [0, 1] \\ \gamma_{\text{green}}(\varphi) &= \sqrt{2} e^{i\varphi}, \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\end{aligned}$$

mit den Ableitungen

$$\begin{aligned}\gamma'_{\text{red}}(t) &= z_1 - z_0 = -2 \\ \gamma'_{\text{green}}(\varphi) &= i\sqrt{2} e^{i\varphi}\end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{\text{red}}} \bar{z} dz &= \int_0^1 \overline{\gamma_{\text{red}}(t)} \gamma'_{\text{red}}(t) dt \\ &= \int_0^1 (1 - i - 2t)(-2) dt = 2i\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{\text{green}}} \bar{z} dz &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \overline{\gamma_{\text{green}}(\varphi)} \gamma'_{\text{green}}(\varphi) d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2} e^{-i\varphi} i\sqrt{2} e^{i\varphi} d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2i d\varphi = i\pi\end{aligned}$$

2. Aufgabe: a) Mit den Parametrisierungen aus Aufgabe 1 bekommen wir:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{\text{red}}} \frac{1}{z} dz &= \int_0^1 \frac{1}{\gamma_{\text{red}}(t)} \times \gamma'_{\text{red}}(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{-2}{1 - 2t + i} dt \\ &= -2 \int_0^1 \frac{1 - 2t - i}{(1 - 2t)^2 + 1} dt \\ &= -2 \int_0^1 \frac{1 - 2t}{(1 - 2t)^2 + 1} dt + 2i \int_0^1 \frac{1}{(1 - 2t)^2 + 1} dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \log[(1-2t)^2 + 1] \Big|_0^1 - i \arctan[1-2t] \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \{ \log 2 - \log 2 \} - i \{ \arctan[-1] - \arctan[1] \} \\
&= -i \left\{ -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right\} = i \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{\text{green}}} \frac{dz}{z} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\gamma'_{\text{green}}(\varphi)}{\gamma_{\text{green}}(\varphi)} d\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{i\sqrt{2} e^{i\varphi}}{\sqrt{2} e^{i\varphi}} d\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} i d\varphi = i \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

b) Als Stammfunktion von $f(z) = \frac{1}{z}$ können wir hier etwa den Logarithmus benutzen, der auf der negativen reellen Achse einen Sprung um 2π macht, also den Hauptzweig des Logarithmus

$$F(z) = \text{Log}(z) := \text{Log}_{(-\pi, \pi)}(z)$$

Wegen

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4} \\
z_1 &= -1 + i = \sqrt{2} e^{i3\pi/4}
\end{aligned}$$

haben wir dann

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{\text{red/green}}} \frac{dz}{z} &= \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz \\
&= F(z) \Big|_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0) \\
&= \text{Log}(\sqrt{2} e^{i3\pi/4}) - \text{Log}(\sqrt{2} e^{i\pi/4}) \\
&= \log(\sqrt{2}) + i3\pi/4 - \log(\sqrt{2}) - i\pi/4 = i\pi/2.
\end{aligned}$$

4. Aufgabe: a) Wir parametrisieren die Wege

$$\begin{aligned}
\gamma_+(t) &= r e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, \pi - \varepsilon] \\
\gamma_-(t) &= r e^{-i\varphi}, \quad \varphi \in [0, \pi - \varepsilon]
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\sqrt{\gamma_+(t)} &= \sqrt{r} e^{i\varphi/2} \\
\sqrt{\gamma_-(t)} &= \sqrt{r} e^{-i\varphi/2}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 \int_{K_r^+} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz &= \int_0^{\pi-\varepsilon} \frac{ir e^{i\varphi}}{2\sqrt{r} e^{i\varphi/2}} d\varphi \\
 &= \frac{i\sqrt{r}}{2} \int_0^{\pi-\varepsilon} e^{i\varphi/2} d\varphi \\
 &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i\sqrt{r}}{2} \int_0^\pi e^{i\varphi/2} d\varphi \\
 &= \frac{i\sqrt{r}}{2} \frac{2}{i} e^{i\varphi/2} \Big|_0^\pi \\
 &= \sqrt{r} (i - 1)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \int_{K_r^-} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz &= \int_0^{\pi-\varepsilon} \frac{-ir e^{-i\varphi}}{2\sqrt{r} e^{-i\varphi/2}} d\varphi \\
 &= -\frac{i\sqrt{r}}{2} \int_0^{\pi-\varepsilon} e^{-i\varphi/2} d\varphi \\
 &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{i\sqrt{r}}{2} \int_0^\pi e^{-i\varphi/2} d\varphi \\
 &= -\frac{i\sqrt{r}}{2} \left(-\frac{2}{i}\right) e^{-i\varphi/2} \Big|_0^\pi \\
 &= \sqrt{r} (-i - 1)
 \end{aligned}$$

b) Wegen

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}}{z - z_0} \frac{\sqrt{z} + \sqrt{z_0}}{\sqrt{z} + \sqrt{z_0}} \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sqrt{z}^2 - \sqrt{z_0}^2}{z - z_0} \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{z_0}} \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{z_0}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{z_0}}
 \end{aligned}$$

gilt für jede komplexe Wurzelfunktion $\frac{d}{dz} \sqrt{z} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ für alle z , an denen die Wurzelfunktion keinen Sprung hat. Also

$$\begin{aligned}
 \int_{K_r^+} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz &= \sqrt{z} \Big|_r^{z_1, +} \\
 &= \sqrt{r e^{i(\pi-\varepsilon)}} - \sqrt{r} \\
 &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{r} e^{i\pi/2} - \sqrt{r} = \sqrt{r} (i - 1)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{K_r^-} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz &= \sqrt{z} \Big|_r^{z_{1,-}} \\ &= \sqrt{re^{i(\pi+\varepsilon)}} - \sqrt{r} \\ &= \sqrt{re^{-i(-\pi-\varepsilon)}} - \sqrt{r} \\ &= \sqrt{re^{-i(-\pi-\varepsilon)-2\pi i}} - \sqrt{r} \\ &= \sqrt{re^{-i(\pi-\varepsilon)}} - \sqrt{r} \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{r} e^{-i\pi/2} - \sqrt{r} = \sqrt{r}(-i - 1) .\end{aligned}$$