Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2019/20

Lösungen 6. Übungsblatt Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Wir verwenden die Formeln

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \qquad \text{oder} \tag{1}$$

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}} \tag{2}$$

Dabei gilt: Falls der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

existiert, dann ist dieser Ausdruck mit dem lim sup identisch, in dem Fall gilt also

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \, . \tag{3}$$

Für diese Aufgabe ist es ausreichend, nur die Formeln (2) und (3) zu benutzen, die Formel (1) wird nicht gebraucht. Falls diese Sachen in der Klausur auftauchen sollten, wird es ebenfalls ausreichend sein, nur die Formeln (2) und (3) zu benutzen, den lim sup müssen Sie für die Klausur nicht kennen.

Wir bekommen folgende Konvergenzradien:

a) Es ist $c_n = \frac{1}{3^n}$, $\sqrt[n]{|c_n|} = 1/3$ und damit $\rho = 3$.

b) Es ist $c_n = \frac{1}{n^3}$, $\sqrt[n]{|c_n|} = 1/\sqrt[n]{n^3} = 1/\sqrt[n]{n}^3 \to 1/1^3 = 1$ und damit $\rho = 1$.

c) Es ist $c_n = n^3$, $\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{n^3} = \sqrt[n]{n}^3 \to 1^3 = 1$ und damit $\rho = 1$.

d) Es ist $c_n = \sqrt{n!}$, $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \sqrt{\frac{(n+1)!}{n!}} = \sqrt{n+1} \to \infty$ und damit $\rho = 1/\infty = 0$.

2.Aufgabe: **a)** Für den Sinus haben wir

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 2k \text{ gerade} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!} = \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} & \text{falls } n = 2k+1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

und für den Cosinus ist

$$c_n \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!} = \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} & \text{falls } n = 2k \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n = 2k+1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

so dass in beiden Fällen $|c_n| \leq 1/n!$ gilt, also ist $e^{|z|} = \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n/n!$ in beiden Fällen eine auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Majorante, also $\rho = \infty$ für beide Reihen.

b) Mit gliedweisem Differenzieren bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\big[\sin(z)\big] &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{d}{dz}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (2n+1)\frac{z^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad = \quad \cos(z) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\big[\cos(z)\big] &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{d}{dz}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (2n)\frac{z^{2n-1}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1} \frac{z^{2(m+1)-1}}{[2(m+1)-1]!} \\ &= -\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{z^{2m+1}}{[2m+1]!} \quad = \quad -\sin(z) \end{aligned}$$

c) Mit $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ folgt

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \\
&= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (i^2)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i \times i^{2k} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos(z) + i \sin(z)
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\cos(-z) = \cos(z)$ und $\sin(-z) = -\sin(z)$ so dass $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$ und damit

$$\begin{aligned}
e^{iz} + e^{-iz} &= \cos z + i \sin z + [\cos z - i \sin z] = 2 \cos z \\
e^{iz} - e^{-iz} &= \cos z + i \sin z - [\cos z - i \sin z] = 2i \sin z
\end{aligned}$$

f) Wir beweisen zunächst die Additionstheoreme ($z, w \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned}
\sin(z+w) &= \sin z \cos w + \sin w \cos z \\
\cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w\ .
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
&\sin z \cos w + \sin w \cos z \\
&\quad = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\
&\quad = \frac{1}{4i} \Big\{ e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} - e^{i(-z+w)} - e^{i(-z-w)} + e^{i(z+w)} + e^{i(w-z)} - e^{i(-w+z)} - e^{i(-w-z)} \Big\} \\
&\quad = \frac{1}{4i} \Big\{ 2e^{i(z+w)} - 2e^{i(-z-w)} \Big\} = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \sin(z+w)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\cos z \cos w - \sin w \sin z \\
&\quad = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} - \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
&\quad = \frac{1}{4} \Big\{ e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} + e^{i(-z+w)} + e^{i(-z-w)} + e^{i(z+w)} - e^{i(w-z)} - e^{i(-w+z)} + e^{i(-w-z)} \Big\} \\
&\quad = \frac{1}{4} \Big\{ 2e^{i(z+w)} + 2e^{i(-z-w)} \Big\} = \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \cos(z+w)
\end{aligned}$$

Damit zeigen wir jetzt den Teil (d).

d) Mit $z = x + iy$ folgt aus den Additionstheoremen:

$$\begin{aligned}\sin(z) = \sin(x+iy) &= \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) \\ &= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)\end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}\cos(iy) &= \frac{e^{i\times iy} + e^{-i\times iy}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \cosh(y) \\ \sin(iy) &= \frac{e^{i\times iy} - e^{-i\times iy}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i \times \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = i\sinh(y)\end{aligned}$$

Und für den Cosinus:

$$\begin{aligned}\cos(z) = \cos(x+iy) &= \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy) \\ &= \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)\end{aligned}$$

e) Für jedes komplexe $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned}\sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = \frac{2+2}{4} = 1\,.\end{aligned}$$