Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2019/20

Lösungen 5. Übungsblatt Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Mit der Formel für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$:

a)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\big(\frac{i}{2}\big)^n &= \frac{1}{1-\frac{i}{2}} = \frac{1+\frac{i}{2}}{|1-\frac{i}{2}|^2} = \frac{1+\frac{i}{2}}{1+\frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{5}\big(1+\frac{i}{2}\big) = \frac{4}{5}+\frac{2}{5}i\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty}\big(\frac{i}{2}\big)^n &= \sum_{n=3}^{\infty}\big(\frac{i}{2}\big)^{n-3} \times \big(\frac{i}{2}\big)^3 \\ &\overset{k=n-3}{=} \big(\frac{i}{2}\big)^3 \sum_{k=0}^{\infty}\big(\frac{i}{2}\big)^k \\ &\overset{(a)}{=} -\frac{i}{8}\big(\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i\big) = \frac{1}{20}-\frac{i}{10}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{1}{2+i}\big)^n &= \sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{1}{2+i}\big)^{n-1} \times \frac{1}{2+i} \\ &\overset{k=n-1}{=} \frac{1}{2+i}\sum_{k=0}^{\infty}\big(\frac{1}{2+i}\big)^k \\ &= \frac{1}{2+i} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2+i}} = \frac{1}{2+i-1} \\ &= \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{|1+i|^2} = \frac{1}{2}-\frac{i}{2}\,.\end{aligned}$$

Es ist also nützlich, sich neben der Formel für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$ auch die Formel

$$\sum_{n=\ell}^{\infty} z^n = \sum_{n=\ell}^{\infty} z^{n-\ell} z^\ell = z^\ell \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{z^\ell}{(1-z)}$$

zu merken.

2.Aufgabe: Sind folgende Reihen konvergent oder divergent? Begründen Sie Ihre Aussagen:

a) Mit $c_n := \frac{(3+4i)^n}{n^2 5^n}$ ist

$$|c_n| \;=\; \Big|\frac{(3+4i)^n}{n^2 5^n}\Big| \;=\; \frac{1}{n^2} \times \Big|\frac{3+4i}{5}\Big|^n \;=\; \frac{1}{n^2} \times \Big(\frac{\sqrt{9+16}}{5}\Big)^n \;=\; \frac{1}{n^2}\;,$$

und da $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergent ist, ist nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent.

Bemerkung: Es ist nützlich, folgenden Sachverhalt im Kopf zu behalten: In der Analysis-Vorlesung wurde mit dem Integral-Vergleichskriterium gezeigt, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \;=\; \begin{cases} \text{konvergent} & \text{for } \alpha > 1 \\ \text{divergent} & \text{for } \alpha \le 1\;, \end{cases}$$

denn es ist für $\alpha = 1$: $\int_1^\infty \frac{dx}{x} \;=\; \log x|_1^\infty \;=\; +\infty$, und für $\alpha \neq 1$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \;=\; \frac{1}{-\alpha+1}\,\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_1^\infty \;=\; \begin{cases} 0 \;-\; \frac{1}{-\alpha+1}\,\frac{1}{1^{\alpha-1}} \;=\; \frac{1}{\alpha-1} & \text{for } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{for } \alpha < 1\;. \end{cases}$$

b) Mit $c_n := \frac{(1+2i)^n}{n}$ ist

$$\Big|\frac{c_{n+1}}{c_n}\Big| \;=\; \Big|\frac{(1+2i)^{n+1}}{n+1}\,\frac{n}{(1+2i)^n}\Big| \;=\; |1+2i| \times \frac{n}{n+1}$$
$$\overset{n\to\infty}{\to} \;|1+2i| \;=\; \sqrt{5} \;>\; 1\;,$$

also ist nach dem Quotientenkriterium die Reihe divergent.

c) Mit $c_n := \frac{n}{(1-i)^n}$ ist

$$\Big|\frac{c_{n+1}}{c_n}\Big| \;=\; \Big|\frac{n+1}{(1-i)^{n+1}}\,\frac{(1-i)^n}{n}\Big| \;=\; \frac{1}{|1-i|} \times \frac{n+1}{n}$$
$$\overset{n\to\infty}{\to} \;\frac{1}{|1-i|} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \;<\; 1\;,$$

also ist nach dem Quotientenkriterium die Reihe konvergent.

3.Aufgabe: Wir benutzen die Formel für die geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{z}\Big)^n$$
$$\overset{|1/z|<1}{=} \;\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \;=\; \frac{z}{z-1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$.

4.Aufgabe: Mit $z = r\,e^{i\varphi}$ und $e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$ folgt mit der Formel für die geometrische Reihe:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\varphi) \;+\; i \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(n\varphi) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} r^n [\cos(n\varphi) + i\,\sin(n\varphi)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} r^n\, e^{in\varphi} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (r\,e^{i\varphi})^n \;=\; \frac{1}{1 - r\,e^{i\varphi}} \;=\; \frac{1 - r\,e^{-i\varphi}}{|1 - r\,e^{i\varphi}|^2} \\
&= \frac{1 - r\cos\varphi + ir\sin\varphi}{(1 - r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} \;=\; \frac{1 - r\cos\varphi + ir\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} \\
&= \frac{1 - r\cos\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} \;+\; i \times \frac{r\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}
\end{aligned}
$$

Nimmt man den Real- und Imaginärteil dieser Gleichung, erhält man die angegebenen Formeln. In der vorletzten Zeile haben wir im Nenner die Formel $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ benutzt.