Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen 4. Übungsblatt Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Wir können die Resultate von Aufgabe 3a,b,c vom 3. Übungsblatt verwenden:
a) Wir haben

$$z^2 \;=\; (x+iy)^2 \;=\; x^2+2xiy+(iy)^2 \;=\; x^2-y^2+i\,2xy$$

also

$$\begin{aligned} u(x,y) &:= \mathrm{Re}(z^2) &=& \; x^2-y^2 \\ v(x,y) &:= \mathrm{Im}(z^2) &=& \; 2xy \end{aligned}$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial x} &= 2x\;, & \tfrac{\partial u}{\partial y} &= -2y \\ \tfrac{\partial v}{\partial x} &= 2y\;, & \tfrac{\partial v}{\partial y} &= 2x\;. \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \;=\; 2-2 \;=\; 0 \\ \Delta v &= \tfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\tfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \;=\; 0+0 \;=\; 0 \end{aligned}$$

und damit sind u und v harmonisch.

b) Es ist

$$z^3 \;=\; (x+iy)^3 \;=\; x^3+3x^2iy+3x(iy)^2+(iy)^3 \;=\; x^3-3xy^2+i\,(3x^2y-y^3)$$

also

$$\begin{aligned} u(x,y) &:= \mathrm{Re}(z^3) &=& \; x^3-3xy^2 \\ v(x,y) &:= \mathrm{Im}(z^3) &=& \; 3x^2y-y^3 \end{aligned}$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2-3y^2\;, & \tfrac{\partial u}{\partial y} &= -6xy \\ \tfrac{\partial v}{\partial x} &= 6xy\;, & \tfrac{\partial v}{\partial y} &= 3x^2-3y^2\;. \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \;=\; 6x-6x \;=\; 0 \\ \Delta v &= \tfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\tfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \;=\; 6y-6y \;=\; 0 \end{aligned}$$

und damit sind u und v harmonisch.

c) Mit der Eulerschen Formel bekommen wir

$$e^z \;=\; e^x e^{iy} \;=\; e^x(\cos y + i\,\sin y) \;=:\; u + iv$$

mit $u(x,y) = e^x \cos y$ und $v(x,y) = e^x \sin y$. Wir haben folgende Ableitungen

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y = \tfrac{\partial v}{\partial y} \\ \tfrac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \sin y = -\tfrac{\partial v}{\partial x}\,. \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0 \\ \Delta v &= \tfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0 \end{aligned}$$

und damit sind u und v harmonisch.

2.Aufgabe: Wir beweisen den Teil (d): Die Höhenlinien von $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$ sind gegeben durch

$$u(x,y) \;=\; const\,, \qquad v(x,y) \;=\; const$$

Wenn wir etwa annehmen, dass durch $t \;\to\; (x(t), y(t)) \;=:\; \vec{x}(t)$ eine Höhenlinie von u parametrisiert wird, dann haben wir also

$$u\big(x(t), y(t)\big) \;=\; const$$

und damit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} const \\ &= \frac{d}{dt} u\big(x(t), y(t)\big) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \\ &= \nabla u \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}\,, \end{aligned}$$

Da $\frac{d\vec{x}}{dt}$ tangential zur Höhenlinie verläuft und da das Skalarprodukt mit dem Gradienten $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ gleich 0 ist, muss dann also der Gradient immer senkrecht auf den Höhenlinien stehen. Wenn wir also zeigen können, dass die Gradienten von u und v senkrecht aufeinander stehen, dann müssen auch die Höhenlinien von u und v selbst aufeinander senkrecht stehen. Nun ist aber

$$\begin{aligned}
\nabla u \cdot \nabla v &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \\
&\overset{\substack{\text{Cauchy} \\ \text{Riemann}}}{=} \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} \quad = \quad 0
\end{aligned}$$

und damit ist die Aussage bewiesen.

3.Aufgabe: **a)** Wir haben folgende Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -e^{-y}\sin x \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -e^{-y}\cos x \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -e^{-y}\cos x \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= e^{-y}\cos x
\end{aligned}$$

und damit

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-y}\cos x + e^{-y}\cos x = 0 \,.$$

Bestimmen Sie ein harmonisch konjugiertes v:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y}\sin x \\
\Rightarrow \quad v(x,y) &= e^{-y}\sin x + C(x) \\
\Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^{-y}\cos x + C'(x) &\overset{!}{=} -\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-y}\cos x \\
\Rightarrow \quad C'(x) &= 0 \\
\Rightarrow \quad v(x,y) &= e^{-y}\sin x + const \\
\Rightarrow \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y) &= e^{-y}(\cos x + i\sin x) + const \\
&= e^{-y}e^{ix} + const \\
&= e^{i(x+iy)} + const \\
&= e^{iz} + const
\end{aligned}$$

b) Wir haben folgende Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 4x^3 - 12xy^2 \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 12x^2 - 12y^2 \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -12x^2 y + 4y^3 \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -12x^2 + 12y^2
\end{aligned}$$

und damit

$$\Delta u \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \;=\; 12x^2 - 12y^2 - 12x^2 + 12y^2 \;=\; 0$$

Bestimmen Sie ein harmonisch konjugiertes v:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} \;=\; 4x^3 - 12xy^2 \\
\Rightarrow \quad v(x,y) &= 4x^3 y - 4xy^3 + C(x) \\
\Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} \;=\; 12x^2 y - 4y^3 + C'(x) &\overset{!}{=} -\frac{\partial u}{\partial y} \;=\; 12x^2 y - 4y^3 \\
\Rightarrow \quad C'(x) &= 0 \\
\Rightarrow \quad v(x,y) &= 4x^3 y - 4xy^3 + const \\
\Rightarrow \quad f(z) \;=\; u(x,y) + iv(x,y) &= x^4 - 6x^2 y^2 + y^4 + i(4x^3 y - 4xy^3) + const \\
&= x^4 + 4x^3(iy) + 6x^2(iy)^2 + 4x(iy)^3 + (iy)^4 + const \\
&= (x+iy)^4 + const \;=\; z^4 + const
\end{aligned}$$

4.Aufgabe: **a)** Wir haben

$$\begin{aligned}
\Delta u_1 &= 2 - 2 \;=\; 0 \\
\Delta u_2 &= 6x - 6x \;=\; 0
\end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned}
u_1 u_2 &= (x^2 - y^2)(x^3 - 3xy^2) \\
&= x^5 - 3x^3 y^2 - x^3 y^2 + 3xy^4 \\
&= x^5 - 4x^3 y^2 + 3xy^4
\end{aligned}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2(u_1u_2)}{\partial x^2} &= 20x^3 - 24xy^2 \\
\frac{\partial^2(u_1u_2)}{\partial y^2} &= -8x^3 + 36xy^2 \\
\Delta(u_1u_2) = \frac{\partial^2(u_1u_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u_1u_2)}{\partial y^2} &= 20x^3 - 24xy^2 - 8x^3 + 36xy^2 \\
&= 12x^3 + 12xy^2 \neq 0 \,.
\end{aligned}
$$

b) Wenn v harmonisch konjugiert ist zu u, dann ist $f := u + iv$ komplex differenzierbar und damit ist auch $f^2 = u^2 - v^2 + 2iuv$ komplex differenzierbar und damit sind $\mathrm{Re}(f^2) = u^2 - v^2$ und $\mathrm{Im}(f^2) = 2uv$ harmonische Funktionen, insbesondere ist also uv eine harmonische Funktion.