## Lösungen 3. Übungsblatt Komplexe Funktionen

**1.Aufgabe:** **a)** Es ist

$$\begin{aligned}
(z-w)\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} w^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-k} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} z^{\ell} w^{n-\ell} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-k} \\
&= z^n w^0 + \sum_{\ell=1}^{n-1} z^{\ell} w^{n-\ell} - \sum_{k=1}^{n-1} z^k w^{n-k} - z^0 w^n \\
&= z^n - w^n ,
\end{aligned}$$

also

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} = \frac{z^n - w^n}{z-w} .$$

**b)** Nach Teil (a) ist

$$\begin{aligned}
\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} &= \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k} \\
&\overset{z\to z_0}{\to} \sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z_0^{n-1-k} = n\, z_0^{n-1} .
\end{aligned}$$

**c)** Ersetzt man in der Formel aus (a) das $n$ durch ein $n+1$ und wählt man $w = 1$, dann bekommt man:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k 1^{n-k} = \frac{z^{n+1} - 1^{n+1}}{z-1}$$

was äquivalent ist zu

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} .$$

**d)** In Polarkoordinaten $z = r\, e^{i\varphi}$ ist $z^n = r^n\, e^{in\varphi}$, also im Limes $n \to \infty$:

$$|z^n| = r^n \to \begin{cases} 0 & \text{falls } r < 1 \\ 1 & \text{falls } r = 1 \\ \infty & \text{falls } r > 1 \end{cases}$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} z^n \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{falls } |z| < 1 \\ 1 & \text{falls } z = 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{falls } |z| \geq 1 \;\text{ und }\; z \neq 1. \end{cases}$$

Also mit der Formel aus (c) für $|z| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \;=\; \frac{1}{1-z}\;.$$

**2.Aufgabe:** **a)** Es ist

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(z)-(fg)(z_0)}{z-z_0} \quad &= \quad \frac{f(z)[g(z)-g(z_0)+g(z_0)]-f(z_0)g(z_0)}{z-z_0} \\ &= \quad f(z)\,\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} \;+\; \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,g(z_0) \\ &\overset{z\to z_0}{\to} \quad f(z_0)g'(z_0) \;+\; f'(z_0)g(z_0)\;. \end{aligned}$$

**b)** Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{(f\circ g)(z)-(f\circ g)(z_0)}{z-z_0} \quad &= \quad \frac{f(g(z))-f(g(z_0))}{g(z)-g(z_0)} \times \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} \\ &\overset{z\to z_0}{\to} \quad f'(g(z_0)) \times g'(z_0)\;. \end{aligned}$$

**c)** Wir zeigen zunächst:

$$\frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{z}\Big) \quad = \quad -\frac{1}{z^2}$$

Nämlich:

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} \quad = \quad \frac{z_0 - z}{z z_0}$$

und damit

$$\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}}{z-z_0} \quad = \quad \frac{-1}{z z_0} \;\overset{z\to z_0}{\to}\; -\frac{1}{z_0^2}\;.$$

Mit der Kettenregel aus (b) folgt dann

$$\Big(\frac{1}{g}\Big)'(z) \quad = \quad -\frac{1}{g(z)^2} \times g'(z)$$

und mit der Produktregel aus (a) erhalten wir schliesslich:

$$\begin{aligned} \Big(\frac{f}{g}\Big)'(z) \quad &= \quad \frac{d}{dz}\Big[f(z) \times \frac{1}{g(z)}\Big] \\ &= \quad f'(z) \times \frac{1}{g(z)} \;+\; f(z) \times \frac{-g'(z)}{g(z)^2} \\ &= \quad \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}\;. \end{aligned}$$

**3.Aufgabe:** **a)** Wir haben

$$z^2 \;=\; (x+iy)^2 \;=\; x^2+2xiy+(iy)^2 \;=\; x^2-y^2+i\,2xy$$

also

$$\begin{aligned} u(x,y) &:= \mathrm{Re}(z^2) &= x^2-y^2 \\ v(x,y) &:= \mathrm{Im}(z^2) &= 2xy \end{aligned}$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial x} &= 2x\;, & \tfrac{\partial u}{\partial y} &= -2y \\ \tfrac{\partial v}{\partial x} &= 2y\;, & \tfrac{\partial v}{\partial y} &= 2x\;. \end{aligned}$$

Also sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial x} &= 2x = \tfrac{\partial v}{\partial y} \\ \tfrac{\partial u}{\partial y} &= -2y = -\tfrac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

erfüllt.

**b)** Es ist

$$z^3 \;=\; (x+iy)^3 \;=\; x^3+3x^2iy+3x(iy)^2+(iy)^3 \;=\; x^3-3xy^2+i\,(3x^2y-y^3)$$

also

$$\begin{aligned} u(x,y) &:= \mathrm{Re}(z^3) &= x^3-3xy^2 \\ v(x,y) &:= \mathrm{Im}(z^3) &= 3x^2y-y^3 \end{aligned}$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2-3y^2\;, & \tfrac{\partial u}{\partial y} &= -6xy \\ \tfrac{\partial v}{\partial x} &= 6xy\;, & \tfrac{\partial v}{\partial y} &= 3x^2-3y^2\;. \end{aligned}$$

Also sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2-3y^2 = \tfrac{\partial v}{\partial y} \\ \tfrac{\partial u}{\partial y} &= -6xy = -\tfrac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

erfüllt.

**c)** Mit der Eulerschen Formel bekommen wir

$$e^z \;=\; e^x e^{iy} \;=\; e^x(\cos y + i\,\sin y) \;=:\; u+iv$$

mit $u(x,y) = e^x\cos y$ und $v(x,y) = e^x \sin y$. Wir haben folgende Ableitungen

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial x} &= e^x\cos y = \tfrac{\partial v}{\partial y} \\ \tfrac{\partial u}{\partial y} &= -e^x\sin y = -\tfrac{\partial v}{\partial x}\;, \end{aligned}$$

also sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt.

**d)** Es ist

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} =: u + iv$$

mit

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2} \\ v(x,y) &= -\frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Wir haben folgende Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

also sind die Cauchy-Riemannschen DGLen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ erfüllt.

**4.Aufgabe:** Die Funktion $f(z) = |z|^2$ ist komplex differenzierbar bei $z_0 = 0$, denn:

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{z\bar{z}}{z} = \bar{z} \overset{z\to 0}{\to} 0$$

also $f'$ existiert an der Stelle $z_0 = 0$ mit $f'(0) = 0$. An jeder Stelle $z$, an der $f$ komplex differenzierbar ist, müssen die Cauchy-Riemannschen DGLen erfüllt sein. Überprüfen wir, ob das für ein $z \neq 0$ der Fall sein kann: Es ist

$$\begin{aligned} u(x,y) &:= \mathrm{Re}(f) = x^2 + y^2 \\ v(x,y) &:= \mathrm{Im}(f) = 0 \end{aligned}$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial x} &= 2x\ , & \tfrac{\partial u}{\partial y} &= 2y \\ \tfrac{\partial v}{\partial x} &= 0\ , & \tfrac{\partial v}{\partial y} &= 0\ . \end{aligned}$$

Sollen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ erfüllt sein, muss also notwendig $x = y = 0$ gelten.

**5.Aufgabe:** Es müssen die Cauchy-Riemannschen DGLen erfüllt sein:

**a)** Es ist $f = u + iv$ mit $u(x,y) = y$ und $v(x,y) = x \Rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$, aber $\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \neq -1 = -\frac{\partial v}{\partial x}$, also ist $f$ nicht komplex differenzierbar.

**b)** Es ist $f = u + iv$ mit $u = y^3 - 3x^2y$ und $v = x^3 - 3xy^2$. Damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -6xy = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 3y^2 - 3x^2 = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

also $f$ ist komplex differenzierbar. Tatsächlich ist $f(z) = i\,z^3 = i\,(x+iy)^3$.

**c)** Es ist $f = u + iv$ mit $u = x^2 + y^2$ und $v = 2xy$. Damit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}$$

aber

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\,, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

also $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ nur für $y = 0$. Die partiellen Ableitungen sind stetig und erfüllen die Cauchy-Riemannschen DGLen nur für $y = 0 \Rightarrow f$ komplex diffbar nur für $y = 0$.

**6.Aufgabe:** Es ist $h(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $u(x,y) = f(x)$ und $v(x,y) = 0$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f'(x) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemannsche DGL $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ist also immer erfüllt. Allerdings ist die andere Cauchy-Riemannsche DGL $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ nur für $f'(x) = 0$ erfüllt, also ist $h(z)$ nur für konstantes $f = \mathit{const}$ komplex differenzierbar.