

## Lösungen 11. Übungsblatt Komplexe Funktionen

**1. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Taylorreihen für folgende Funktionen  $f(z)$  mit Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$  auf möglichst einfache Art und Weise:

a) Auf dem 6. Übungsblatt wurde die Sinus-Funktion definiert durch die Potenzreihenentwicklung

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

also ist

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{120} \mp \dots$$

Der Konvergenzradius für die Sinus-Reihe und damit auch für die  $f(z)$ -Reihe ist unendlich.

b) Mit der geometrischen Reihe haben wir die Entwicklung

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

für  $|z| < 1$ . Damit:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1+z^4}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} + z^4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2(n+2)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-2} z^{2k} \\ &= 1 - z^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n z^{2n} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k z^{2k} \\ &= 1 - z^2 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \end{aligned}$$

mit Konvergenzradius 1.

c) Hier benutzen wir die Definition der Taylorreihe und berechnen dann die Ableitungen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

mit

$$\begin{aligned}f(z) &= (1+z)^{1/2} \\f'(z) &= \frac{1}{2}(1+z)^{-1/2} \\f''(z) &= \frac{1}{2} \frac{-1}{2} (1+z)^{-3/2} \\f'''(z) &= \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \frac{-3}{2} (1+z)^{-5/2} \\f^{(4)}(z) &= \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \frac{-5}{2} (1+z)^{-7/2} \\&\vdots \\f^{(n)}(z) &= \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \frac{-5}{2} \dots \frac{-2n+3}{2} (1+z)^{\frac{-2n+1}{2}}\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}f^{(n)}(0) &= \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \frac{-5}{2} \dots \frac{-2n+3}{2} \\&= (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n}\end{aligned}$$

und damit

$$f(z) = \sqrt{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{n!2^n} z^n$$

Für den Konvergenzradius würden wir  $\rho = 1$  erwarten, da  $\sqrt{1+z}$  an der Stelle  $z = -1$  nicht komplex differenzierbar ist, checken wir das: Mit  $c_n := (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{n!2^n}$  erhalten wir

$$\begin{aligned}\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| &= \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!2^{n+1}} \times \frac{n!2^n}{(2n-3)!!} \\&= \frac{2n-1}{(n+1)2} \rightarrow 1\end{aligned}$$

und damit

$$\rho = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = 1$$

d) Hier können wir einfach die Binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

anwenden und erhalten

$$f(z) = (1+z)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} z^k$$

mit Konvergenzradius unendlich.

e) Kurze Erinnerung: Mit Quotientenregel ist

$$\tan'(z) = \frac{\sin' z \cos z - \sin z \cos' z}{\cos^2 z} = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = 1 + \tan^2(z)$$

Für jede arcus-tangens-Funktion, für jede Umkehr-Funktion des Tangens, gilt:

$$\tan(\arctan(z)) = z$$

und damit, wenn wir diese Gleichung differenzieren,

$$\begin{aligned} \tan'(\arctan(z)) \times \arctan'(z) &= 1 \\ \Leftrightarrow (1+z^2) \times \arctan'(z) &= 1 \\ \Leftrightarrow \arctan'(z) &= \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \end{aligned}$$

mit Konvergenzradius 1. Damit:

$$\begin{aligned} f(z) = \arctan(z) &= \arctan(0) + \int_0^z \arctan'(w)dw \\ &= \arctan(0) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^z w^{2n} dw \\ &= \arctan(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \end{aligned}$$

ebenfalls mit Konvergenzradius 1. Und für den Hauptzweig der arcus-tangens-Funktion ist  $\arctan(0) = 0$  (es ist  $\tan(0) = 0$ , aber ebenso ist auch  $\tan \pi = 0$  oder allgemeiner  $\tan(k\pi) = 0$  für ganzzahlige  $k$ ).

## 2.Aufgabe: a) Die Funktion

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{z}$$

ist analytisch im Inneren des geschlossenen Weges

$$C = C_{\text{green}} + C_{\text{blau}} + C_{\text{rot}},$$

also ist für jedes  $R < \infty$  und jedes  $\varepsilon > 0$

$$\int_C f(z)dz = \int_{\text{green}} f(z)dz + \int_{\text{blau}} f(z)dz + \int_{\text{rot}} f(z)dz = 0$$

und damit auch

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left\{ \int_{\text{green}} f(z)dz + \int_{\text{blau}} f(z)dz + \int_{\text{rot}} f(z)dz \right\} = 0$$

Daraus folgt sofort

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z} dz - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon^-} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

b) siehe das file `Loesung11-Aufg2b.txt`.

c) Wir haben

$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon^-} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_\pi^0 \frac{\exp\{i\varepsilon e^{i\varphi}\}}{\varepsilon e^{i\varphi}} i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi \\ &= - \int_0^\pi \exp\{i\varepsilon e^{i\varphi}\} i d\varphi \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_0^\pi \exp\{0\} i d\varphi = -i\pi. \end{aligned}$$

Für den  $R \rightarrow \infty$  Grenzwert integrieren wir anstatt über dem Halbkreis  $C_R^+$  von  $R$  nach  $-R$  über das dreiviertel Rechteck  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$  bestehend aus den drei Strecken

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= R + tiR, \quad t \in [0, 1] \\ \gamma_2(t) &= R + iR - t2R, \quad t \in [0, 1] \\ \gamma_3(t) &= -R + iR - tiR, \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

was ebenfalls von  $R$  nach  $-R$  geht. Da der Weg  $C_R^+ - \gamma$  geschlossen ist und  $f(z)$  im Inneren von  $C_R^+ - \gamma$  analytisch ist, ist  $\int_{C_R^+ - \gamma} f(z) dz = 0$  und damit  $\int_{C_R^+} f(z) dz = \int_\gamma f(z) dz$ . Nun ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_0^1 \frac{e^{i(R+tiR)}}{R + tiR} iR dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{iR-tR}}{1 + ti} i dt \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_1} f(z) dz \right| &\leq \int_0^1 \frac{e^{-tR}}{|1 + ti|} dt \\ &\leq \int_0^1 \frac{e^{-tR}}{1} dt = \frac{1 - e^{-R}}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

und analog  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_3} f(z) dz = 0$ . Schauen wir uns noch das Integral über  $\gamma_2$  an: wir haben

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} f(z) dz &= \int_0^1 \frac{e^{i(R+iR-2tR)}}{R + iR - 2tR} (-2R) dt \\ &= e^{iR-R} \int_0^1 \frac{e^{-2tR}}{1 + i - 2t} (-2) dt \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| &\leq 2e^{-R} \int_0^1 \frac{e^{-2tR}}{|1 + i - 2t|} dt \\ &\leq 2e^{-R} \int_0^1 \frac{e^{-2tR}}{1} dt = 2e^{-R} \frac{1 - e^{-2R}}{2R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

also insgesamt  $\int_{C_R^+} f(z) dz = \int_\gamma f(z) dz \rightarrow 0$  für  $R \rightarrow \infty$ .