Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2019/20

Lösungen 10. Übungsblatt Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Wir benutzen die Formeln

$$f(z_0) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

und allgemeiner

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

für eine im Inneren von C komplex diffbare Funktion f und z_0 eine komplexe Zahl im Inneren der einfach geschlossenen Kurve C. Damit:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1(0)} \frac{\sin z}{z}\,dz &= \sin 0 = 0\\
\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1(0)} \frac{\sin z}{z^2}\,dz &= \frac{\cos 0}{1!} = 1\\
\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1(0)} \frac{\sin z}{z^3}\,dz &= \frac{-\sin 0}{2!} = 0\\
\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1(0)} \frac{\sin z}{z^4}\,dz &= \frac{-\cos 0}{3!} = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

b)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1(0)} \frac{1}{z\cos z}\,dz \;=\; \frac{1}{\cos 0} = 1$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1(1)} \frac{1}{1-z^2}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{K_1(1)} \frac{1}{(1-z)(1+z)}\,dz\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{K_1(1)} \frac{-1/(1+z)}{z-1}\,dz\\
&= \frac{-1}{(1+1)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

d)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1(1)} \frac{1}{(1-z^2)^2}\,dz \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{K_1(1)} \frac{1}{(1-z)^2(1+z)^2}\,dz$$
$$= \frac{d}{dz}\frac{1}{(1+z)^2}\Big|_{z=1} \;=\; \frac{-2}{(1+z)^3}\Big|_{z=1} \;=\; -\frac{1}{4}$$

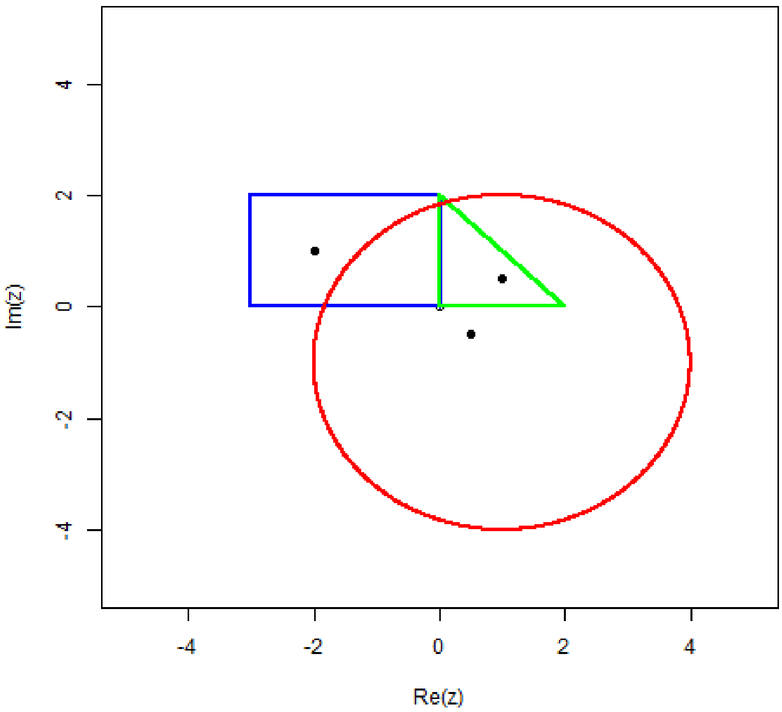
e)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_2(1)} \frac{\sqrt{4+z}}{z}\,dz \;=\; \sqrt{4} \;=\; 2$$

f)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1(3i/2)} \frac{\mathrm{Log}(z)}{z-i}\,dz \;=\; \mathrm{Log}(i) \;=\; i\frac{\pi}{2}\,.$$

2.Aufgabe: Man erhält folgendes Bild:



Wir benutzen folgende Resultate aus der Vorlesung: Es sei C eine einfache geschlossene Kurve. Dann:

$$\int_C \frac{dz}{z-z_0} \;=\; \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } z_0 \text{ im Inneren von } C \text{ liegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^2} \;=\; 0$$

egal ob z_0 im Inneren oder ausserhalb von C liegt. Weiterhin ist $\int_C f(z)dz = 0$ falls f im Inneren von C komplex diffbar ist, also keine Pole innerhalb von C liegen. Damit erhalten wir

a) $z_0 = -2 + i$ liegt im Inneren von C_1, aber ausserhalb von C_2 und C_3. Also

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z-z_0} \;=\; \int_{C_3} \frac{dz}{z-z_0} \;=\; 0$$

und

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z-z_0} \;=\; 2\pi i$$

b) $z_0 = 1 + i/2$ liegt im Inneren von C_2 und C_3, aber ausserhalb von C_1. Also

$$\int_{C_1} \frac{z\,dz}{z-z_0} \;=\; 0$$

und, mit $f(z) = z$,

$$\int_{C_{2,3}} \frac{z\,dz}{z-z_0} \;=\; 2\pi i\, f(z_0) \;=\; 2\pi i\, z_0 \;=\; 2\pi i - \pi$$

c) $z_0 = \frac{1-i}{2}$ liegt innerhalb von C_3, aber ausserhalb von C_1 und C_2. Also

$$\int_{C_1} \frac{zdz}{(z-z_0)^2} \;=\; \int_{C_2} \frac{zdz}{(z-z_0)^2} \;=\; 0$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{C_3} \frac{zdz}{(z-z_0)^2} &= \int_{C_3} \frac{(z-z_0+z_0)dz}{(z-z_0)^2} \\
&= \int_{C_3} \frac{dz}{z-z_0} + z_0 \int_{C_3} \frac{dz}{(z-z_0)^2} \\
&= 2\pi i
\end{aligned}$$

d) Das Integral

$$\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^2} \;=\; 0$$

egal, ob z_0 im Inneren oder ausserhalb von C liegt (sollte nur nicht auf C liegen).