Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen 1. Übungsblatt Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $a + ib$:

a) Es ist $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \times i = -i$, $i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1$ und damit

$$i^{177} = i^{4\times 44+1} = (i^4)^{44} \times i = 1^{44} \times i = i$$

b) Es ist

$$\frac{1}{i^7} = \frac{1}{i^4 \times i^3} = \frac{1}{1 \times (-i)} = \frac{i}{(-i) \times i} = i \; .$$

c) Wir haben mit der Binomischen Formel für $(a + b)^3$:

$$(i+2)^3 = i^3 + 3i^2 2 + 3i2^2 + 2^3 = -i - 6 + 12i + 8 = 2 - 11i \; .$$

d) Wir erweitern mit dem komplex konjugierten des Nenners:

$$\frac{4+3i}{2-i} = \frac{(4+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{8+4i+6i+3i^2}{2^2-i^2} = \frac{5+10i}{5} = 1+2i \; .$$

e) Wir erweitern mit dem komplex konjugierten des Nenners:

$$\frac{1}{(1-i)^2} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2(1+i)^2} = \frac{1+2i+i^2}{(1-i^2)^2} = \frac{2i}{4} = \frac{i}{2}$$

Mit der Eulerschen Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

und der folgenden Werte-Tabelle

Winkel φ in Grad	0°	45°	90°	135°	180°	270°
Winkel φ im Bogenmaß	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$
$\cos\varphi$	1	$\sqrt{2}/2$	0	-$\sqrt{2}/2$	-1	0
$\sin\varphi$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	-1

erhalten wir für (f)-(k):

$$
\begin{aligned}
e^{i\frac{\pi}{4}} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
e^{i\frac{\pi}{2}} &= i \\
e^{i\frac{3\pi}{4}} &= -\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
e^{i\pi} &= -1 \\
e^{i\frac{3\pi}{2}} &= -i \\
e^{-i\frac{\pi}{2}} &= -i
\end{aligned}
$$

Allgemein gilt

$$
\begin{aligned}
|e^{i\varphi}| &= |\cos\varphi + i\,\sin\varphi| \\
&= \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} \;=\; \sqrt{1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

so dass also $e^{i\varphi}$ für einen beliebigen reellen Winkel φ immer auf dem Einheitskreis liegt.

2.Aufgabe: Es sei

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_1 + iy_1 \\
z_2 &= x_2 + iy_2
\end{aligned}
$$

Dann ist $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$ und

$$
\begin{aligned}
z_1\bar{z}_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) \\
&= x_1x_2 + y_1y_2 + i(-x_1y_2 + y_1x_2)
\end{aligned}
$$

Nennen wir die Vektoren die z_1 und z_2 entsprechen etwa $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$, also

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= (x_1, y_1) \\
\vec{v}_2 &= (x_2, y_2)
\end{aligned}
$$

dann haben wir also

$$
\begin{aligned}
z_1 \text{ steht senkrecht auf } z_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 \text{ steht senkrecht auf } \vec{v}_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{das Skalarprodukt ist } 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \;=\; 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1x_2 + y_1y_2 \;=\; 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \;=\; 0\,.
\end{aligned}
$$

3.Aufgabe: Man bekommt folgendes:

a) Das ist ein Kreis um $z_0 = -2 + i$ mit Radius 2.

b) Mit $z = x + iy$ ist $\mathrm{Im}(z + 1 + i) = y + 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y = -1$, das ist eine parallele Gerade zur x-Achse, die die y-Achse bei $y = -1$ schneidet.

c) Das ist eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt $z_0 = 1 + 2i$ und Radius 1.

d) Mit $z = x+iy$ ist $\mathrm{Re}(z-2+i) = x-2 \overset{!}{>} 4 \Rightarrow x > 6$, die Gerade $x = 6$ ist eine Parallele zur y-Achse, die die x-Achse bei $x = 6$ schneidet, $x > 6$ ist die Halbebene rechts von dieser Geraden.

4.Aufgabe: $\mathrm{Arg}(z)$ war ein eindeutig bestimmter Winkel, der immer zwischen $-\pi$ und π liegen muss, und $\arg(z)$ ist eine Menge von Winkeln. Die genauen Definitionen waren mit $z = x + iy = r\,e^{i\varphi}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Arg}(z) &:= \varphi \in (-\pi, \pi], \quad \text{falls } z = r\,e^{i\varphi} \text{ mit } r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \arg(z) &:= \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = r\,e^{i\varphi} \text{ mit } r = \sqrt{x^2+y^2}\ \} \end{aligned}$$

und es gilt allgemein

$$\arg(z) = \{\ \mathrm{Arg}(z) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\ \}$$

da $e^{i2\pi k} = 1$ für alle ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$. Wir müssen also nur noch das $\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ bestimmen:

$$\begin{aligned} &\textbf{a)} \quad 1 - i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Arg}(z) = -\frac{\pi}{4} \\ &\textbf{b)} \quad -\sqrt{3} + i = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Arg}(z) = \frac{5\pi}{6} \\ &\textbf{c)} \quad (1-i)^3 = \left(\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = \sqrt{2}^3\,e^{-i\frac{3\pi}{4}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Arg}(z) = -\frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

und damit

$$\textbf{d)} \quad \frac{2}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3}$$

Schliesslich

$$\begin{aligned} \textbf{e)} \quad \frac{2}{i-1} &= \frac{2(-i-1)}{(i-1)(-i-1)} = -2\frac{i+1}{2} = -i-1 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}} \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{Arg}(z) = -\frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

5.Aufgabe: Wir haben:

$$\begin{aligned} &\textbf{a)} \quad -4 = 4\,e^{i\pi} \\ &\textbf{b)} \quad 6 - 6i = 6\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ &\textbf{c)} \quad -7i = 7\,e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

und

$$-\sqrt{3} - i \;=\; \overline{-\sqrt{3} + i} \;\overset{(4b)}{=}\; \overline{2\, e^{i\frac{5\pi}{6}}} \;=\; 2\, e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

und damit

$$\mathbf{d}) \qquad (-\sqrt{3} - i)^{30} \;=\; \left(\, 2\, e^{-i\frac{5\pi}{6}} \,\right)^{30} \;=\; 2^{30}\, e^{-i25\pi} \;=\; 2^{30}\, e^{-i\pi} \;.$$