Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2019/20

8. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

1.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ sei das Wiener-Maß. Beweisen Sie: Für $t > s$ gilt:

a) $\mathsf{E}[\, x_t - x_s \,] \;=\; 0\,.$

b) $\mathsf{V}[\, x_t - x_s \,] \;=\; t - s\,.$

c) $\mathsf{Cov}[\, x_s\,,\; x_t \,] \;=\; \min\{\, s\,,\, t\,\} \;=\; s\,.$

Verwenden Sie dazu das Theorem 4.1 aus der Vorlesung mit $m = 2$.

2.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ sei das Wiener-Maß. Beweisen Sie: Für $t > s$ gilt:

a) $\mathsf{E}\big[\, |x_t - x_s| \,\big] \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}(t-s)}.$

b) $\mathsf{V}\big[\, |x_t - x_s| \,\big] \;=\; \big(1 - \frac{2}{\pi}\big)(t-s).$

Verwenden Sie dazu wieder das Theorem 4.1 aus der Vorlesung.

3.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ sei eine integrierbare Funktion. Für eine Diskretisierung $\{0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, N\Delta t = T\}$ des Intervalls $[0,T]$ definieren wir die Grösse

$$I_{\Delta t}(f) \;:=\; \sum_{k=1}^{N} f(t_k)\,(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})^2 \tag{1}$$

Beweisen Sie: Es gilt

$$\lim_{\Delta_t \to 0} I_{\Delta t}(f) \;=\; \int_0^T f(t)\,dt \tag{2}$$

Dabei ist der Limes im folgenden Sinne zu verstehen:

$$\lim_{\Delta_t \to 0} \mathsf{Prob}\Big[\, \big|I_{\Delta t}(f) \,-\, \int_0^T f(t)\,dt\big| \;\geq\; \varepsilon \,\Big] \;=\; 0 \quad \forall \varepsilon > 0\;.$$

Hinweis: In der Vorlesung haben wir diese Aussage für den Fall $f(t) = 1$ bewiesen.

..bitte wenden

Wichtige Bemerkung (Rechenregeln für die Brownsche Bewegung): Schreibt man den Ausdruck in (1) im Limes $\Delta t \to 0$ als $\int_0^T f(t)\, dx_t^2$, dann liest sich die Gleichung (2) folgendermaßen:

$$\int_0^T f(t)\, dx_t^2 \;=\; \int_0^T f(t)\, dt \tag{3}$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung (3) wird üblicherweise in der kompakten Notation

$$(dx_t)^2 \;=\; dt \tag{4}$$

zum Ausdruck gebracht, obwohl die Gleichung (4) nur für sich genommen, etwa wieder mit endlicher Diskretisierung $dt \to \Delta t > 0$, ja nicht richtig ist: Die Brownsche Bewegung ist gegeben durch (bei endlicher Diskretisierung)

$$x_{t_k} \;=\; \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^{k} \phi_j \tag{5}$$

mit standard-normalverteilten Zufallszahlen ϕ_j, also ist

$$(dx_t)^2 \;\leftarrow\; (\Delta x_{t_k})^2 \;=\; (x_{t_k} - x_{t_{k-1}})^2 \;=\; \left(\, \sqrt{\Delta t}\, \phi_k \,\right)^2 \;=\; \Delta t\, \phi_k^2 \;\neq\; \Delta t \;\to\; dt \tag{6}$$

Erst wenn die Gleichung (6) über k summiert wird und dann der Limes $\Delta t \to 0$ genommen wird (und vorher vielleicht noch mit einem beliebigen Faktor f_{t_k} multipliziert wird), also erst nach Anwenden der Operation

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} \cdots \qquad\qquad \text{mit } N \;=\; \tfrac{T}{\Delta t} \;\to\; \infty \tag{7}$$

erhält man aus (6) eine korrekte Identität. Allerdings, wenn man eine formale Rechnung macht, in der dt's und dx_t's vorkommen, hat man das Anwenden der Operation (7) am Ende der Rechnung üblicherweise immer vor um dann zu konkreten Zahlen zu kommen, und deshalb werden wir also im weiteren Verlauf der Vorlesung bei solchen Rechnungen immer die **folgenden Rechenregeln**

$$\begin{aligned} (dx_t)^2 &= dt \\ dx_t\, dt &= 0 \\ (dt)^2 &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

verwenden.