## 5. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

**1.Aufgabe:** Wir betrachten ein N-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess (k = 1, 2, ..., N)

$$S_k = S_{k-1} \times \begin{cases} (1+q) & \text{mit W'keit } p_{\text{up}} = 1/2\\ (1-q) & \text{mit W'keit } p_{\text{down}} = 1/2 \end{cases}$$

mit  $q \in (0,1)$  (etwa N=250 und q=1%) und  $S_0=100$ . Berechnen Sie folgende Erwartungswerte:

- a)  $E[S_N]$
- **b)**  $E[S_N | \{S_j\}_{j=0}^k]$
- c)  $\mathsf{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}S_{m}\right]$
- d)  $E\left[\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}S_{m} \mid \{S_{j}\}_{j=0}^{k}\right]$
- e)  $\mathsf{E}[\frac{S_0}{S_N}]$
- **f)**  $E[\frac{S_0}{S_N} | \{S_j\}_{j=0}^k]$

Bemerkung: Die eigentliche Rechnung ist nicht so schwierig, die Übung besteht mehr darin, sich zu überlegen, ob das Ergebnis eine reine Zahl ist oder ob und welche Buchstaben dann noch im Ergebnis auftauchen.

**2.Aufgabe:** Wir betrachten ein N-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess (k = 1, 2, ..., N)

$$S_k = S_{k-1} \times \begin{cases} (1+q) & \text{mit W'keit } p_{\text{up}} = p \\ (1 + \text{ret}_{\text{down}}) & \text{mit W'keit } p_{\text{down}} = 1 - p \end{cases}$$

mit einer up-Wahrscheinlichkeit  $p \in (0, 1)$ .

- a) Für welche Werte des down-returns  $\operatorname{ret}_{\operatorname{down}}$  ist der Preisprozess  $\{S_k\}_{k=0}^N$  ein Martingal? Wie gross ist dieser Wert etwa für p=3/4 (hängt dann noch von q ab)?
- b) Berechnen Sie für diesen Fall (p = 3/4 und  $\operatorname{ret}_{\operatorname{down}}$  so gewählt, dass der Preisprozess ein Martingal ist) noch einmal die sechs Erwartungswerte aus Aufgabe 1.