Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2019/20

4. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

1.Aufgabe: Wir betrachten ein 2-Perioden Binomialmodell und zwei Optionen H_a und H_b mit folgenden Spezifikationen:

Underlying				Option Payoffs	
S				Ha	Hb
		121		20	0
	110				
100		99		10	10
	90				
		81		0	20

Wir wollen die Preise und die replizierenden Strategien für diese Optionen berechnen für den Fall Zinsen $r = 0$ und den Fall Zinsen $r = 5\%$. Dabei sei $r = 5\%$ der Zinssatz pro Periode und wir nehmen stetige Verzinsung an, ein Geldbetrag G soll also seinen Wert von Periode zu Periode gemäss $G \to e^{5\%} \times G$ ändern.

a) Die Zinsen seien Null, $r = 0$. Zeichnen Sie zwei Binomialbäume, für jede Option einen, und tragen Sie dann an den Knotenpunkten die Werte des replizierenden Portfolios $V_{k,\ell}$ und die delta's $\delta_{k,\ell}$ ein. Dabei sei $k \in \{0, 1, 2\}$ wie üblich der Zeit- oder Perioden-Index und $\ell \in \{0, 1, 2\}$ bezeichne die Anzahl der up-moves.

b) Es seien $V_{a;k,\ell}$, $V_{b;k,\ell}$ und $\delta_{a;k,\ell}$, $\delta_{b;k,\ell}$ die Werte aus Aufgabenteil (a), also für den Fall Zinsen $r = 0$. Beweisen Sie: Für alle $k, \ell \in \{0, 1, 2\}$ gilt

$$\begin{aligned} V_{a;k,\ell} \;+\; V_{b;k,\ell} &= 20 \\ \delta_{a;k,\ell} \;+\; \delta_{b;k,\ell} &= 0 \end{aligned}$$

Versuchen Sie, nicht einfach nur die blossen numerischen Werte zu berechnen, sondern überlegen Sie sich, was der eigentliche Grund dafür ist. Versuchen Sie, ein allgemeines Theorem zu formulieren.

c) Die Zinsen seien jetzt ungleich Null, $r = 5\%$. Zeichnen Sie wieder zwei Binomialbäume, für jede Option einen, und tragen Sie dann an den Knotenpunkten die Werte der kleinen $v_{k,\ell}$'s, die diskontierten Portfoliowerte, und die delta's $\delta_{k,\ell}$ ein. Berechnen Sie dann die Werte der grossen $V_{k,\ell}$'s.

..bitte wenden

d) Es seien $v_{a;k,\ell}$, $v_{b;k,\ell}$ und $\delta_{a;k,\ell}$, $\delta_{b;k,\ell}$ die Werte aus Aufgabenteil (c), also für den Fall Zinsen $r = 5\%$. Beweisen Sie: Für alle $k, \ell \in \{0, 1, 2\}$ gilt

$$\begin{aligned} v_{a;k,\ell} \;+\; v_{b;k,\ell} &= e^{-2\times 5\%} \times 20 \\ \delta_{a;k,\ell} \;+\; \delta_{b;k,\ell} &= 0 \end{aligned}$$

Versuchen Sie wieder, ein allgemeines Theorem zu formulieren.

e) Die Option H_a wird deutlich teurer im Fall mit Zinsen und die Option H_b wird deutlich billiger im Fall mit Zinsen, warum ist das so?

f) Wir wollen noch checken, dass im Fall mit Zinsen die replizierende Strategie tatsächlich die Optionsauszahlung replizieren tut. Machen Sie das für beide Optionen H_a und H_b für den Preispfad, sagen wir, $\{\text{up,down}\}$.