Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2019/20

3. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

1.Aufgabe: Wir betrachten einen Zeithorizont von 3 Wochen und wir nehmen an, dass sich der Preis $S_k = S(t_k)$ einer Aktie S sich nur wöchentlich ändern kann und dabei nur 2 Einstellungsmöglichkeiten hat. Das heisst genauer, wir betrachten ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess

$$S_k \;=\; S_{k-1} \times \begin{cases} (1+\mathrm{ret}_{\mathrm{up}}) & \text{mit W'keit } \; p_{\mathrm{up}} \\ (1+\mathrm{ret}_{\mathrm{down}}) & \text{mit W'keit } \; p_{\mathrm{down}} = 1 - p_{\mathrm{up}} \end{cases}$$

mit $k = 0, 1, 2, 3$ (und etwa $t_0 = 0$, $t_1 = 1\mathrm{week}$, $t_2 = 2\mathrm{weeks}$, $t_3 = 3\mathrm{weeks}$). Die wöchentlichen Returns seien gegeben durch

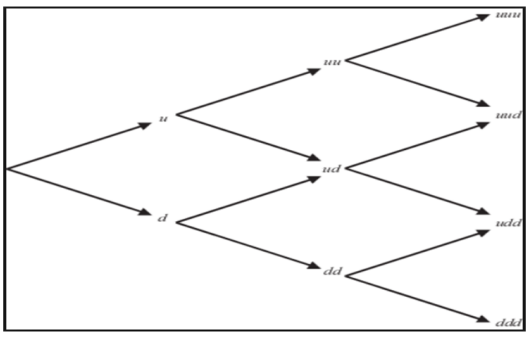
$$\begin{aligned} \mathrm{ret}_{\mathrm{up}} &= +10\% \\ \mathrm{ret}_{\mathrm{down}} &= -10\% \end{aligned}$$

und die (etwa durch eine Zeitreihenanalyse ermittelte) Wahrscheinlichkeit für einen up-move sei 60%, $p_{\mathrm{up}} = 60\%$. Weiter sei $S_0 = 100$.

Sämtliche möglichen Preise in diesem Modell lassen sich durch zwei Parameter charakterisieren: Einem Zeit-Parameter $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, der uns sagt, in welcher Zeit-Periode wir gerade sind. Und einem weiteren Parameter ℓ, der uns sagt, wie viele up-moves es bis zum aktuellen Zeitpunkt gegeben hat. Also $\ell \in \{0, 1, 2, 3\}$. Der Preis $S_{k,\ell}$ zum Zeitpunkt k bei ℓ up-moves ist dann also gegeben durch

$$S_{k,\ell} \;:=\; S_0(1+\mathrm{ret}_{\mathrm{up}})^{\ell}(1+\mathrm{ret}_{\mathrm{down}})^{k-\ell}$$

a) Machen Sie sich klar, dass alle möglichen Preise durch die folgende Binomialbaum-Struktur verdeutlicht werden können,



und tragen Sie dann an den Knotenpunkten die numerischen Werte für die jeweiligen Preise $S_{k,\ell}$ ein.

..bitte wenden

b) Zeigen Sie, dass sich die Rekursionsformel für die Portfoliowerte V_k aus der Vorlesung sich in diesem Fall auf die Formel

$$V_k \;=\; \frac{V_{k+1}^{\text{up}} + V_{k+1}^{\text{down}}}{2}$$

reduziert. Nehmen Sie an, dass die Zinsen Null sind, $r = 0$.

c) Betrachten Sie eine Standard-Kauf-Option mit Fälligkeit $t_N = t_3 = 3\text{weeks}$ und Auszahlungsfunktion

$$H_{\text{call}}(S_3) \;=\; \max\{S_3 - S_0\,,\,0\} \tag{1}$$

Berechnen Sie den Preis dieser Option, indem Sie die Rekursionsformel aus Teil (b) verwenden.

d) Berechnen Sie jetzt für jeden Knotenpunkt im Binomial-Baum das $\delta_{k,\ell}$, die Anzahl von Aktien, die man zum Zeitpunkt t_k halten muss, wenn der Aktienpreis $S_{k,\ell}$ ist, damit man den Payoff (1) replizieren kann.

e) Betrachten Sie jetzt die folgenden 2 Preis-Pfade:

$$\begin{aligned} \text{Pfad}_1 &:= \{\text{down}, \text{up}, \text{up}\} \\ \text{Pfad}_2 &:= \{\text{up}, \text{up}, \text{down}\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie jetzt explizit für diese beiden Pfade, dass die replizierende Strategie definiert durch die δ's aus Teil (d) tatsächlich die Optionsauszahlung (1) replizieren tut.

2. Aufgabe: Wiederholen Sie die Aufgabenteile (c-e) der Aufgabe 1 noch einmal für eine Standard-Verkaufs-Option mit Auszahlungsfunktion

$$H_{\text{put}}(S_3) \;=\; \max\{S_0 - S_3\,,\,0\} \tag{2}$$

Also berechnen Sie den Preis V_0 und die Absicherungsstrategie $\delta_{k,\ell}$ für diese Option und überprüfen Sie Ihre Absicherungsstrategie, sagen wir, für die zwei Preis-Pfade

$$\begin{aligned} \text{Pfad}_1 &:= \{\text{down}, \text{down}, \text{down}\} \\ \text{Pfad}_2 &:= \{\text{up}, \text{up}, \text{up}\}\ . \end{aligned}$$

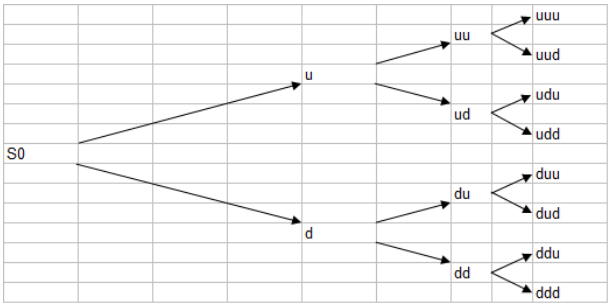
3. Aufgabe: Wir betrachten ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess

$$S_k \;=\; S_{k-1} \times (1 + \text{ret}_k)$$

mit Returns gegeben durch $\text{ret}_k \in \{\,+10\%\,,\,-10\%\,\}$ für $k = 1, 2, 3$ und nehmen an, dass die Zinsen Null sind, $r = 0$. Es sei $S_0 = 100$. Wir betrachten eine All Time High Option mit Auszahlung

$$H\big(\{S_k\}\big) \;=\; \max_{k\in\{0,1,2,3\}} S_k\ .$$

a) Berechnen Sie den Preis V_0 dieser Option. Machen Sie sich dazu zunächst klar, dass es jetzt nicht mehr ausreichend ist, einen rekombinierenden Binomial-Baum mit 4 End-Punkten zu betrachten (wie in Aufgabe 1 und 2), sondern Sie müssen folgende Baum-Struktur betrachten,



n-Perioden Binär-Baum mit 2^n Endpunkten, $n = 3$

Berechnen Sie dann wieder die V_k an allen Knotenpunkten mit Hilfe der Rekursionsformel aus Theorem 2.1.

b) Berechnen Sie für jeden Knotenpunkt die δ's, die Anzahl von Aktien, die man halten muss, damit man die Optionsauszahlung H replizieren kann.

c) Betrachten Sie jetzt die folgenden 2 Preis-Pfade:

$$\begin{aligned} \text{Pfad}_1 &:= \{\text{up}, \text{up}, \text{up}\} \\ \text{Pfad}_2 &:= \{\text{down}, \text{down}, \text{up}\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie explizit für diese beiden Pfade, dass die replizierende Strategie definiert durch die δ's aus Teil (b) tatsächlich die Optionsauszahlung H replizieren tut.