Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2019/20

2. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

1.Aufgabe: Ein Investor verfolgt folgende Handelsstrategie: Ist S_k der Schlusskurs einer Aktie am Tag k, so hält er $S_0 - S_k$ Aktien am Ende von Tag k. Folgender Preis-Pfad $\{S_0, S_1, ..., S_7\}$ habe sich realisiert:

$$\{100, 98, 95, 97, 101, 101, 105, 108\}$$

Die Position wurde am Ende von Tag 7 zum Schlusskurs von 108 geschlossen. Welchen Betrag hat diese Strategie generiert? Die Zinsen seien $r = 0$.

2.Aufgabe: Betrachten Sie einen (unrealistischen) diskreten Preisprozess $S_k = S(t_k)$, $k = 0, 1, 2, ...$, mit den Eigenschaften $S_k \in \mathbb{N}$, etwa $S_0 = 100$, und

$$S_k - S_{k-1} \quad = \quad \pm 1 \tag{1}$$

Wir wählen ein Gap $\Delta \in \mathbb{N}$ (etwa $\Delta = 5$) und betrachten die folgende Handelsstrategie:

- Am Starttag t_0 halten wir keine Aktien, $\delta_0 = 0$. Wir führen einen Referenz-Level S_{ref} ein und setzen diesen auf S_0, $S_{\text{ref}} := S_0$.
- Sei $k > 0$. Am Tag t_k machen wir folgendes:
  - (i) Ist $S_k - S_{\text{ref}} \geq \Delta$, dann kaufen wir eine Aktie und definieren den neuen Referenz-Level $S_{\text{ref}} := S_k$.
  - (ii) Ist $S_k - S_{\text{ref}} \leq -\Delta$, dann verkaufen wir eine Aktie und definieren den neuen Referenz-Level $S_{\text{ref}} := S_k$.
  - (iii) Ist $-\Delta < S_k - S_{\text{ref}} < \Delta$, dann machen wir nichts und der Referenz-Level wird nicht verändert.

Wir sagen, dass ein trade event stattgefunden hat, wenn entweder der Fall (i) oder (ii) eingetreten ist. Wir betrachten den Wert des Handelsportfolios nach genau p trade events (das könnte theoretisch unendlich lange dauern). Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass es einen Handelstag $t_N = t_{N_p} < \infty$ gibt, an dem der p-te trade-event stattgefunden hat. Aus der Vorlesung ist bekannt (wir nehmen $r = 0$ an, keine Zinsen), dass der durch eine Handelsstrategie generierte Betrag gegeben ist durch (bei Startkapital $V_0 = 0$)

$$V_{N_p} \quad = \quad \sum_{j=1}^{N_p} \delta_{j-1}(S_j - S_{j-1}) \tag{2}$$

a) Überlegen Sie sich, dass die Anzahl der gehaltenen Aktien δ_{N_p} am trade-event Tag t_{N_p}, nach readjustment, gegeben ist durch

$$\delta_{N_p} = \frac{S_{N_p} - S_0}{\Delta}$$

b) Beweisen Sie: Der Wert des Handelsportfolios nach dem p-ten trade event ist gegeben durch

$$V_{N_p} = \frac{(S_{N_p} - S_0)^2 - p\Delta^2}{2\Delta} \tag{3}$$

Hinweis: Induktion nach p.

c) Betrachten Sie jetzt den Fall $\Delta = 1$ so dass, wegen der Annahme $S_k - S_{k-1} = \pm 1$, an jedem Tag t_k ein trade event stattfindet. Zeigen Sie, dass sich in diesem Fall die Formel aus (b) auf

$$V_N = \frac{(S_N - S_0)^2 - N}{2} \tag{4}$$

reduziert.

Bemerkung: Wenn man also annimmt, dass weder diese Handelsstrategie noch die gegenteilige gegeben durch $\delta_j \to -\delta_j$ auf lange Sicht einen systematischen Gewinn erwirtschaften tut, dann muss

$$\mathsf{E}[\,(S_N - S_0)^2\,] = N$$

gelten. Das ist bereits ein erster Hinweis darauf, dass bei der stochastischen Modellierung von Finanzzeitreihen die Brownsche Bewegung x_t eine Rolle spielen wird, da für die Brownsche Bewegung die Formel

$$\mathsf{E}[\,(x_t - x_0)^2\,] = t$$

erfüllt ist.

3.Aufgabe: Wir betrachten einen Zeithorizont von $T = 10$ Jahren und wir nehmen an, dass der jährliche Zinssatz bei $r = 8\%$ liegt. Ein Start-Kapital von 100 Euro soll verzinst werden. Wie gross ist das End-Kapital nach 10 Jahren bei

a) jährlicher

b) halbjährlicher

c) viertel-jährlicher

d) monatlicher

e) stetiger

Verzinsung?