Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2019/20

13. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

1.Aufgabe: Es sei $\{S_t\}_{t\geq 0}$ gegeben durch das Black-Scholes Modell

$$dS_t/S_t = \mu\, dt + \sigma\, dx_t$$

mit x_t eine Brownsche Bewegung und wir definieren

$$\tilde{S}_t := 1/S_t$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Ito-Formel, dass $\tilde{S}_t$ ebenfalls wieder eine geometrische Brownsche Bewegung ist, d.h. $\tilde{S}_t$ erfüllt die Gleichung

$$d\tilde{S}_t/\tilde{S}_t = a\, dt + b\, dx_t$$

mit geeigneten Konstanten a und b. Bestimmen Sie diese Konstanten a und b als Funktion von μ und σ.

2.Aufgabe: Es sei x_t eine Brownsche Bewegung. Beweisen Sie folgende Identitäten mit Hilfe der Ito-Formel:

a) $\int_0^t x_s\, dx_s = \frac{x_t^2 - t}{2}$

b) $\int_0^t x_s^2\, dx_s = \frac{x_t^3}{3} - \int_0^t x_s\, ds$

c) $\int_0^t s\, dx_s = t\, x_t - \int_0^t x_s\, ds$

3.Aufgabe: Es sei $H = H(S)$ ein option payoff und $V = V(S,t)$ sei eine Lösung der Black-Scholes PDE

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

$$V(S,T) = H(S)$$

Weiter sei ein stochastischer Preisprozess $\{S_t\}_{t\geq 0}$ gegeben durch das Black-Scholes Modell mit Drift μ,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dx_t \tag{1}$$

Es sei $V_0 = V(S_0, 0)$ der Optionspreis von H, $\delta_t = \delta(S_t, t) := \frac{\partial V(S_t,t)}{\partial S_t}$ und $s_t := e^{-rt} S_t$ sei der diskontierte Preisprozess. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$e^{-rT} H(S_T) \;=\; V_0 \;+\; \int_0^T \delta_t \, ds_t \tag{2}$$

erfüllt ist. Diese Gleichung besagt, dass im Black-Scholes Modell jede Optionsauszahlung durch eine geeignete Handelsstrategie repliziert werden kann.

Bemerkung: Beachten Sie, dass der Preisprozess $\{S_t\}_{0 \le t \le T}$, der auf der linken und der rechten Seite von (2) eingesetzt wird, der 'real world' Preisprozess ist mit einem beliebigen Drift-Parameter μ, das muss nicht der risikoneutrale Preisprozess mit Drift r sein.

Die Aufgabe 3 wird in der Vorlesung vorgerechnet.