12. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

1.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Wir wollen in dieser Aufgabe Erwartungswerte von stochastischen Integralen berechnen. Dazu diskretisieren wir das Intervall

$$[\,0\,,\,T\,] \;\approx\; \{\,t_0\,,\,t_1\,,\,t_2\,,\,\cdots\,,\,t_{N-1}\,,\,t_N\,\}$$

mit

$$t_k \;= k\,\Delta t$$

und

$$t_N \;=\; N\,\Delta t \;=\; T$$

so dass also $N = T/\Delta t$ oder $\Delta t = T/N$. Wir betrachten das Ito-Integral

$$I_1 \;:=\; \int_0^T x_t\,dx_t \;=\; \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=1}^{N} x_{t_{k-1}}\,(x_{t_k}-x_{t_{k-1}}) \;=:\; \lim_{\Delta t\to 0} I_1(\Delta t)$$

und das sogenannte Stratonovich-Integral

$$I_2 \;:=\; \int_0^T x_t \circ dx_t \;=\; \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=1}^{N} \tfrac{x_{t_{k-1}}+x_{t_k}}{2}\,(x_{t_k}-x_{t_{k-1}}) \;=:\; \lim_{\Delta t\to 0} I_2(\Delta t)$$

Erinnern Sie sich daran, dass in diskretisierter Zeit eine Brownsche Bewegung gegeben ist durch

$$x_{t_k} \;=\; \sqrt{\Delta t}\sum_{j=1}^{k}\phi_j$$

mit standard-normalverteilten Zufallszahlen $\{\phi_k\}_{k=1,\ldots,N}$, und dass Erwartungswerte entweder mit dem Theorem 4.1 aus dem Skript oder aber auch wie folgt berechnet werden können:

$$\mathsf{E}[\,\cdot\,] \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} \cdot \prod_{k=1}^{N} e^{-\frac{\phi_k^2}{2}}\,\frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}}$$

Zeigen Sie jetzt:

a) Es gilt

$$\mathsf{E}\big[\,I_1(\Delta t)\,\big] \;=\; 0\,.$$

b) Es gilt

$$\mathsf{E}\big[\,I_2(\Delta t)\,\big] \;=\; \frac{T}{2}\,.$$

..bitte wenden

2.Aufgabe: Wir betrachten dasselbe Setting wie in Aufgabe 1. Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist das Ito-Integral und das Stratonovich-Integral definiert durch

$$\int_0^T f(x_t)\,dx_t \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} f(x_{t_{k-1}})\,(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) \qquad \text{(Ito)}$$

$$\int_0^T f(x_t) \circ dx_t \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} f\big(\tfrac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2}\big)\,(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) \qquad \text{(Stratonovich)}$$

In der Vorlesung haben wir die Formel

$$\int_0^T f(x_t) \circ dx_t \;=\; \int_0^T f(x_t)\,dx_t \;+\; \frac{1}{2}\int_0^T f'(x_t)\,dt \qquad (1)$$

bewiesen. In der ersten Aufgabe haben Sie die Formel

$$\mathsf{E}\Big[\int_0^T f(x_t) \circ dx_t\Big] \;=\; \mathsf{E}\Big[\int_0^T f(x_t)\,dx_t\Big] \;+\; \tfrac{1}{2}\,\mathsf{E}\Big[\int_0^T f'(x_t)\,dt\Big] \qquad (2)$$

für den Fall $f(x) = x$ verifiziert, indem Sie die linke und die rechte Seite explizit berechnet haben. Verifizieren Sie jetzt die Formel (2) für den Fall $f(x) = x^3$, indem Sie die linke und die rechte Seite explizit berechnen.

3.Aufgabe: Wir betrachten dasselbe Setting wie in den Aufgaben 1 und 2.

a) Verifizieren Sie die Formel (1),

$$\int_0^T f(x_t) \circ dx_t \;=\; \int_0^T f(x_t)\,dx_t \;+\; \frac{1}{2}\int_0^T f'(x_t)\,dt$$

durch eine geeignete Simulation in Excel/VBA.

b) Verifizieren Sie die Integral-Version der Ito-Formel (mit $x_0 = 0$)

$$f(x_T) \;-\; f(x_0) \;=\; \int_0^T f'(x_t)\,dx_t \;+\; \frac{1}{2}\int_0^T f''(x_t)\,dt$$

durch eine geeignete Simulation in Excel/VBA.

Bemerkung: Die Ito-Formel in Teil (b) wird üblicherweise mit der Ito-Definition für das stochastische Integral, also mit einem Ito-Integral, geschrieben. Man kann sie auch mit einem Stratonovich-Integral schreiben, wegen Teil (a) gilt dann offensichtlich:

$$f(x_T) \;-\; f(x_0) \;=\; \int_0^T f'(x_t) \circ dx_t \;\;.$$

Die Aufgabe 3 wird in der Vorlesung vorgerechnet.