Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2019/20

11. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

1.Aufgabe: Bei Optionen unterscheidet man grob zwischen 'performance-type' Optionen, bei denen der payoff eine Funktion der performance S_T/S_0 ist, und payoffs in 'absolute amount', bei denen der payoff, wie bei einem Standard-Call, etwa durch $H(S_T) = \max\{S_T - K, 0\}$ gegeben ist. Wir betrachten eine 'at the money performance type' Call-Option mit Fälligkeitsdatum T ('at the money' meint strike $= 1 = 100\%$ und nicht etwa 80% oder 120%) und payoff

$$H_{\text{call,perf}}(S_T) \;=\; \max\{\, S_T/S_0 - 1\,,\, 0\,\}$$

Wir nehmen an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$. Es bezeichne V_0 den Optionspreis bei $t = 0$ im Black-Scholes Modell.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Black-Scholes Formeln aus der Vorlesung:

$$V_0 \;=\; N(\sigma\sqrt{T}/2) - N(-\sigma\sqrt{T}/2)$$

mit $N(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$.

b) Zeigen Sie, dass für nicht zu grosse Werte von $\sigma\sqrt{T}$, etwa $\sigma\sqrt{T} \lesssim 1$, der Preis aus (a) angenähert werden kann durch

$$V_0 \;\approx\; \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} \;\approx\; 0.4 \times \sigma\sqrt{T}\,.$$

2.Aufgabe: Die Preisdynamik eines Underlyings $\{S_t\}_{t\geq 0}$ sei gegeben durch das Black-Scholes Modell

$$dS_t/S_t \;=\; \mu\, dt \;+\; \sigma\, dx_t$$

mit $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Die Zinsen seien gegeben durch $r > 0$. Betrachten Sie die Option H mit Laufzeit $T > 0$ und Auszahlungsfunktion

$$H(S_T) \;=\; (S_T/S_0)^{\alpha}$$

Dabei sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Konstante.

..bitte wenden

a) Berechnen Sie den Preis V_t der Option zur Zeit $t \in [0, T]$. Benutzen Sie dazu die Formel

$$V_t \;=\; e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} H\big(S_t \, e^{\sigma\sqrt{T-t}\,x \,+\, (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \big) \; e^{-\frac{x^2}{2}} \, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

Für den Fall $\alpha = -1$ wurde der Zeit $t = 0$ Preis V_0 schon auf dem letzten Übungsblatt berechnet. In den Lösungen zum 10. Übungsblatt finden Sie ebenfalls den Zeit $t \in [0, T]$ Preis für diesen Fall, so dass Sie Ihr Ergebnis etwas testen können.

b) Zeigen Sie jetzt, für beliebiges α, dass Ihr Zeit t Preis $V_t = V(S_t, t)$ aus (a) die Black-Scholes PDE

$$\frac{\partial V}{\partial t} \;+\; \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \;+\; rS \frac{\partial V}{\partial S} \;-\; rV \;=\; 0$$

erfüllt.