Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2019/20

1. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

1.Aufgabe: Eine Aktie habe einen Preis von $S_0 = 100$. Wir betrachten einen Zeithorizont von 1 Monat und nehmen an, dass diese Aktie entweder nur nach 110 steigen kann oder auf 80 fallen kann. Wir betrachten eine Standard-Verkaufs-Option (engl.: Put Option) mit Fälligkeit (engl.: maturity) $T = 1$ Monat und Ausübungspreis (engl.: strike) $K = S_0 = 100$. Die Auszahlungsfunktion (engl.: payoff) dieser Option ist also gegeben durch

$$H(S_T) \quad = \quad \max\{\, S_0 - S_T \,,\, 0 \,\}$$

Dabei ist $S_T \in \{80, 110\}$ der Preis der Aktie in einem Monat.

a) Berechnen Sie den Preis dieser Option.

b) Was muss die Verkäuferin dieser Option (typischerweise eine Bank) tun, damit, egal ob die Aktie steigt oder fällt, sie in jedem Fall in der Lage ist, der Auszahlungsverpflichtung der Option nachzukommen, ohne dabei Verlust zu machen?

Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem von 2 Gleichungen mit 2 Variablen auf (was sind diese beiden Variablen?) und lösen Sie dann dieses Gleichungssystem. Die Zinsen seien $r = 0$ (wieso spielen Zinsen hier überhaupt eine Rolle?).

2.Aufgabe: In den slides zu 'Chapter 0: The Main Idea: Replication of Financial Derivatives' haben wir ein Derivat oder eine Option als beliebige Auszahlungsfunktion $f(S_T)$ definiert. Der Begriff "Option" hat historische Gründe und resultiert aus folgender Definition:

(i) Der Käufer einer Standard-Kauf-Option (engl. "Call-Option") mit Ausübungspreis K und Laufzeit T hat das Recht, aber nicht die Pflicht, den der Option zu Grunde liegenden Basiswert S vom Options-Verkäufer zum Zeitpunkt T zum Preis von K zu kaufen.

(ii) Der Käufer einer Standard-Verkaufs-Option (engl. "Put-Option") mit Ausübungspreis K und Laufzeit T hat das Recht, aber nicht die Pflicht, den der Option zu Grunde liegenden Basiswert S an den Options-Verkäufer zum Zeitpunkt T zum Preis von K zu verkaufen.

Überlegen Sie sich, dass die Definitionen (i) und (ii) zu den folgenden Definitionen (a) und (b) äquivalent sind:

(a) Ist S_T der Preis des der Option zu Grunde liegenden Basiswertes zur Zeit T, dann bekommt der Käufer einer Standard-Kauf-Option mit Ausübungspreis K vom Options-Verkäufer zum Zeitpunkt T den Betrag

$$H_{\text{Call}}(S_T) \;=\; \max\{\, S_T - K\,,\, 0\,\}$$

ausbezahlt.

(b) Ist S_T der Preis des der Option zu Grunde liegenden Basiswertes zur Zeit T, dann bekommt der Käufer einer Standard-Verkaufs-Option mit Ausübungspreis K vom Options-Verkäufer zum Zeitpunkt T den Betrag

$$H_{\text{Put}}(S_T) \;=\; \max\{\, K - S_T\,,\, 0\,\}$$

ausbezahlt.

In der Vorlesung werden wir unter dem Begriff "Option" immer eine Auszahlungsfunktion $H(S_T)$ oder allgemeiner $H(\{S_t\}_{0\le t\le T})$ verstehen. Das ist dann also der Betrag, den der Options-Verkäufer an den Options-Käufer bei Fälligkeit T zahlen muss.