

Lösungen 12. Übungsblatt Komplexe Funktionen

1. Aufgabe: Nach dem Residuensatz gilt

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Pole } z_j \text{ in } C} a_{-1}(f, z_j)$$

wobei wir die Residuen $a_{-1}(f, z_j)$ mit der Formel

$$a_{-1}(f, z_j) = \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{k-1} \{ f(z)(z - z_j)^k \}$$

berechnen können, wenn f bei z_j einen Pol der Ordnung k hat. Insbesondere:

Für k=1: Pol erster Ordnung, einfache Polstelle:

$$a_{-1}(f, z_j) = \lim_{z \rightarrow z_j} \{ f(z)(z - z_j) \}$$

Für k=2: Pol zweiter Ordnung, quadratische Polstelle:

$$a_{-1}(f, z_j) = \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{d}{dz} \{ f(z)(z - z_j)^2 \}$$

Nun ist

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+4)} = \frac{1}{(z-1)^2(z-2i)(z+2i)}$$

also hat f einen quadratischen Pol bei 1 und zwei einfache Pole bei $\pm 2i$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{C_1^+(1)} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+4)} &= 2\pi i a_{-1}(z_0 = 1) \\ \int_{C_4^+(0)} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+4)} &= 2\pi i [a_{-1}(1) + a_{-1}(2i) + a_{-1}(-2i)] \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a_{-1}(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{(z-1)^2(z^2+4)} \times (z-1)^2 \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{z^2+4} \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-2z}{(z^2+4)^2} = -\frac{2}{25} \end{aligned}$$

also

$$\int_{C_1^+(1)} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+4)} = 2\pi i a_{-1}(z_0=1) = -\frac{4\pi}{25} i$$

und

$$\begin{aligned} a_{-1}(2i) &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{(z-1)^2(z-2i)(z+2i)} \times (z-2i) \\ &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{(z-1)^2(z+2i)} \\ &= \frac{1}{(2i-1)^2 4i} = \frac{1}{(-4-4i+1)4i} = \frac{1}{(-4i-3)4i} = \frac{1}{16-12i} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a_{-1}(-2i) &= \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{1}{(z-1)^2(z-2i)(z+2i)} \times (z+2i) \\ &= \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{1}{(z-1)^2(z-2i)} \\ &= \frac{1}{(-2i-1)^2 (-4i)} = \frac{1}{(-4+4i+1)(-4i)} = \frac{1}{(4i-3)(-4i)} = \frac{1}{16+12i} \end{aligned}$$

so dass

$$a_{-1}(2i) + a_{-1}(-2i) = \frac{32}{256+144} = \frac{32}{400} = \frac{2}{25}$$

und damit

$$\int_{C_4^+(0)} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+4)} = 2\pi i [a_{-1}(1) + a_{-1}(2i) + a_{-1}(-2i)] = 0.$$

2. Aufgabe: Es sei γ_R die Strecke auf der reellen Achse von $-R$ nach R und $K_{R,+} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ sei der Kreisbogen um 0 mit Radius R in der oberen Halbebene, durchlaufen von R nach $-R$. Mit

$$C_R := \gamma_R \cup K_{R,+}$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{dz}{(1+z^2)^2} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^4} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^4} \end{aligned}$$

da wir weiter unten zeigen werden:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_{R,+}} \frac{dz}{(1+z^2)^2} &= 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_{R,+}} \frac{dz}{1+z^4} &= 0 \end{aligned}$$

Mit dem Residuensatz haben wir dann:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{dz}{(1+z^2)^2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{dz}{(z+i)^2(z-i)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i}, \end{aligned}$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2\pi i}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

Beim zweiten Integral sind die Nullstellen des Nenners gegeben durch $z^4 + 1 = 0$ oder

$$z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad z_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

so dass

$$z^4 + 1 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$$

und damit haben wir 4 einfache Pole, zwei in der oberen und zwei in der unteren Halbebene. Da wir den Integrationsweg in der oberen Halbebene geschlossen haben, folgt mit dem Residuensatz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^4} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} \\ &= a_{-1}(z_1) + a_{-1}(z_2) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} + \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)} \\ &= \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} + \frac{1}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}(1+i)\sqrt{2}i} + \frac{1}{-\sqrt{2}\sqrt{2}i\sqrt{2}(-1+i)} \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{(1+i)\sqrt{2}} + \frac{1}{-\sqrt{2}(-1+i)} \right\} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} \right\} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{2} = \frac{1}{2i} \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \frac{1}{2i} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Schliesslich parametrisieren wir noch $K_{R,+}$ durch

$$z(\varphi) = R e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, \pi]$$

so dass

$$\begin{aligned} \left| \int_{K_{R,+}} \frac{dz}{(1+z^2)^2} \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{i R e^{i\varphi} d\varphi}{(1+R^2 e^{2i\varphi})^2} \right| \\ &\leq \int_0^\pi \frac{R d\varphi}{|1+R^2 e^{2i\varphi}|^2} \\ &\leq \int_0^\pi \frac{R d\varphi}{(R^2-1)^2} = \frac{R\pi}{(R^2-1)^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

und analog $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_{R,+}} \frac{dz}{1+z^4} = 0$.

3. Aufgabe: Bestimmen Sie die Residuen $a_{-1}(f, z_0 = 0)$ für folgende Funktionen f : Mit der Formel aus Aufgabe 1:

a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$: Wegen $\cos 0 = 1 \neq 0$ hat f einen Pol dritter Ordnung bei $z = 0$. Also:

$$\begin{aligned} a_{-1}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dz} \right)^2 \cos z \\ &= -\frac{\cos(0)}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) $f(z) = \frac{z^2 + 4z + 5}{z^2 + z} = \frac{z^2 + 4z + 5}{z(z+1)}$ hat einen einfachen Pol bei $z = 0$, also

$$a_{-1}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 4z + 5}{z + 1} = 5$$

c) $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ hat einen quadratischen Pol bei $z = 0$, also

$$a_{-1}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} e^z = 1$$

d) Wir benutzen die Potenzreihen von e^z und $\sin z$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{2z} - 1}{\sin^2 z} \\ &= \frac{1 + 2z + O(z^2) - 1}{(z - O(z^3))^2} = \frac{2z + O(z^2)}{z^2 + O(z^4)} \\ &= \frac{2 + O(z)}{z + O(z^3)} = \frac{1}{z} \times \frac{2 + O(z)}{1 + O(z^2)} \end{aligned}$$

hat einen einfachen Pol bei $z = 0$ mit Residuum

$$\lim_{z \rightarrow 0} \{zf(z)\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 + O(z)}{1 + O(z^2)} = 2.$$