Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

5. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik I

1.Aufgabe: Gauss'sche Integrale: Die folgenden Formeln werden wir sehr häufig im weiteren Verlauf der Vorlesung benutzen. Beweisen Sie sie:

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \;=\; \sqrt{2\pi}\,.$$

Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \;=\; \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right\}^{1/2}$ und Polarkoordinaten.

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \;=\; 1\,.$$

Dabei heisst der Integrand

$$p(x;\mu,\sigma) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

die Dichte der Gauss'schen Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ.

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; 1\,.$$

Hinweis: $x^2\, e^{-\frac{x^2}{2}} = x \times x\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ und partielle Integration.

d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; 0\,.$$

e)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; 3\,.$$

e)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \, e^{-\frac{x^2}{2}} \, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; \begin{cases} (n-1)!! & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

mit

$$(n-1)!! \;:=\; (n-1)(n-3)(n-5)\cdots 3 \cdot 1 \; .$$

f)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \, e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} \, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \, e^{\frac{1}{\alpha}\frac{\lambda^2}{2}} \; , \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \;\; \alpha > 0 \; .$$

Hinweis: quadratische Ergänzung.

Aufgabe 2) Es sei ϕ eine mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ normalverteilte Zufallsvariable.

a) Drücken Sie die Aussage "der Erwartungswert von ϕ ist μ" durch eine exakte mathematische Formel aus und beweisen Sie diese Formel durch explizite Rechnung.

b) Drücken Sie die Aussage "die Varianz von ϕ ist σ^2" durch eine exakte mathematische Formel aus und beweisen Sie diese Formel durch explizite Rechnung.

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ϕ vom Erwartungswert um mindestens 2 Standardabweichungen abweicht?

d) Wie gross muss $p \in \mathbb{R}^+$ sein, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass ϕ vom Erwartungswert um mindestens p Standardabweichungen abweicht, höchstens 0.1% betragen soll?