Hochschule RheinMain WS 2016/17
Prof. Dr. D. Lehmann

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik I

1.Aufgabe: Gegeben sei eine Option mit Laufzeit $T > 0$ und Auszahlung

$$H(S_T) \;:=\; \frac{S_0}{S_T}$$

Die Preisdynamik von $\{S_t\}_{t\geq 0}$ sei gegeben durch das Black-Scholes Modell

$$dS_t/S_t \;=\; \mu\, dt + \sigma\, dx_t$$

Nehmen Sie an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass der Black-Scholes-Preis einer Option $H = H(S_T)$ zur Zeit $t \in [0, T]$ gegeben ist durch

$$V(S_t, t) \;=\; \int_{\mathbb{R}} H\big(S_t\, e^{\sigma\sqrt{T-t}\,x+(r-\sigma^2/2)(T-t)}\big)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

a) Berechnen Sie $V(S_t, t)$ für die Option $H(S_T) \;=\; S_0/S_T$.

b) Zeigen Sie, dass $V(S_t, t)$ die Black-Scholes PDE mit Zinsen $r = 0$ erfüllt.

c) Berechnen Sie die replizierende Strategie für diese Option, d.h., berechnen Sie das $\delta = \delta(S_t, t)$ für diese Option für $0 \leq t < T$.

d) Für diesen Aufgabenteil brauchen wir das Material aus Kapitel 8, das können Sie also jetzt noch nicht lösen: Zeigen Sie jetzt explizit, daß Sie mit dem fairen Preis $V_0 = V(S_0, 0)$ aus (a) und den δ's aus (c) tatsächlich den Option payoff replizieren können. D.h., zeigen Sie explizit mit Hilfe der Ito-Formel, daß die Gleichung

$$H(S_T) \;=\; V_0 \;+\; \textstyle\int_0^T \delta(S_t, t)\, dS_t$$

erfüllt ist.

2.Aufgabe: Bei Optionen unterscheidet man grob zwischen 'performance-type' Optionen, bei denen der payoff eine Funktion der performance S_T/S_0 ist, und payoffs in 'absolute amount', bei denen der payoff, wie bei einem Standard-Call, etwa durch $H(S_T) = \max\{S_T - K, 0\}$ gegeben ist. Wir betrachten eine 'at the money performance type' Call-Option mit Fälligkeitsdatum T und payoff ('at the money' meint strike $= 1 = 100\%$ und nicht etwa 80% oder 120%)

$$H_{\text{call,perf}}(S_T) \;=\; \max\{\, S_T/S_0 - 1\,,\, 0\,\}$$

Wir nehmen an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$. Es bezeichne V_0^{BS} den Optionspreis bei $t = 0$ im Black-Scholes Modell.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Black-Scholes Formeln aus der Vorlesung:

$$V_0^{\mathrm{BS}} \;=\; N(\sigma\sqrt{T}/2) - N(-\sigma\sqrt{T}/2)$$

mit $N(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$.

b) Zeigen Sie, dass für nicht zu grosse Werte von $\sigma\sqrt{T}$, etwa $\sigma\sqrt{T} \lesssim 1$, der Preis aus (a) angenähert werden kann durch

$$V_0^{\mathrm{BS}} \;\approx\; \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4 \times \sigma\sqrt{T}$$

c) Berechnen Sie, etwa in Excel, die Preise aus Teil (a) und die Näherung aus Teil (b) für $\sigma \in \{10\%, 20\%, ..., 50\%\}$ und $T \in \{1, 2, ..., 5\}$.