

8. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

1. Aufgabe: Wir betrachten eine Standard-Kauf-Option mit Fälligkeitsdatum T und Ausübungspreis K

$$H_{\text{call}}(S_T) = \max\{S_T - K, 0\}$$

im Black-Scholes Modell. In der Vorlesung haben wir folgende Pricing-Formel, die Black-Scholes Formel, hergeleitet: Ist V_t der Preis des Calls zur Zeit $t \in [0, T]$, dann gilt:

$$V_t = \text{BSPrice}(S_t, K, \sigma, r, T - t)$$

mit einer Funktion

$$\text{BSPrice}(S, K, \sigma, r, \tau) = S N(d_+) - e^{-r\tau} K N(d_-)$$

wobei

$$d_{\pm} = \frac{\log \frac{S}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

und

$$N(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

Implementieren Sie die Funktion $\text{BSPrice}(S, K, \sigma, r, \tau)$ in Excel/VBA.

2. Aufgabe: In dieser Aufgabe sollen mit Hilfe der Funktion BSPrice aus Aufgabe 1 konkrete Preise und Sensitivitäten ("Greeks", delta, vega, rho) für eine Call-Option berechnet werden. Die 5 Parameter der Funktion BSPrice sollen folgende Default-Werte haben, wovon wir jeweils 4 festhalten werden und einen Parameter variieren:

$$\begin{aligned} S &= S_0 &= 100 \\ K &= 100 \\ \sigma &= 20\% \\ r &= 3\% \\ \tau &= T &= 1 \end{aligned}$$

a) Variiere S_0 : Berechnen Sie V_0 für $S_0 \in \{80, 90, 100, 110, 120\}$.

b) Variiere σ : Berechnen Sie V_0 für $\sigma \in \{15\%, 20\%, 25\%, 30\%\}$.

- c) Variiere r : Berechnen Sie V_0 für $r = 0$, $r = 3\%$ und $r = 6\%$.
- d) Variiere t bei festem T : Plotten Sie V_t als Funktion von $t \in [0, T]$, für $T = 4$ Jahre, für folgende Strikes K : $K = 100$, $K = 120$ und $K = 80$, für jedes K einen Plot.

Die exakten Preise aus (a), (b) und (c) wollen wir jetzt mit Hilfe der Greeks und dem 'Default-Preis'

$$\text{BSPrice}(S = 100, K = 100, \sigma = 20\%, r = 3\%, \tau = 1) =: V_0$$

approximieren. Die Greeks sind ebenfalls an der Stelle $(S = 100, K = 100, \sigma = 20\%, r = 3\%, \tau = 1)$ auszuwerten:

- a2)** Delta, Variiere S_0 : Berechnen Sie das Delta des Calls und vergleichen Sie die linke und die rechte Seite der Approximation

$$V_0(S) \approx V_0(S_0) + \delta \times (S - S_0)$$

für $S_0 = 100$ und $S \in \{80, 90, 100, 110, 120\}$.

- b2)** Vega, Variiere σ : Berechnen Sie das Vega des Calls und vergleichen Sie die linke und die rechte Seite der Approximation

$$V_0(\sigma) \approx V_0(\sigma_0) + \text{vega} \times (\sigma - \sigma_0)$$

für $\sigma_0 = 20\%$ und $\sigma \in \{15\%, 20\%, 25\%, 30\%\}$.

- c2)** Rho, Variiere r : Berechnen Sie das Rho des Calls und vergleichen Sie die linke und die rechte Seite der Approximation

$$V_0(r) \approx V_0(r_0) + \rho \times (r - r_0)$$

für $r_0 = 3\%$ und $r \in \{0\%, 3\%, 6\%\}$.

Schliesslich wollen wir noch folgende Beziehung zwischen dem Theta und dem Gamma, die wir in der Vorlesung in dem Kapitel 7 als Konsequenz der Black-Scholes PDE erhalten werden, überprüfen: Wenn die Zinsen $r = 0$ sind, dann gilt

$$\theta = -\frac{\sigma^2}{2} \times S^2 \times \gamma$$

Berechnen Sie die linke und die rechte Seite dieser Gleichung für die Default-Parameterwerte und für $r = 0$.