Hochschule RheinMain | WS 2016/17
Prof. Dr. D. Lehmann

7. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

1.Aufgabe: In der Vorlesung haben wir die Formel

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} f\left(\tfrac{2k-N}{\sqrt{N}}\right) \times \tfrac{1}{2^N} \tbinom{N}{k} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \tag{1}$$

benutzt und im Skript wird sie mit Hilfe der Fourier-Transformation bewiesen. In dieser Aufgabe geben wir einen alternativen Beweis (oder eher Plausibilisierung, da wir keine rigorosen Fehlerschranken angeben) mit Hilfe der Stirlingschen Formel. Diese lautet: Für grosse N gilt:

$$N! \;\approx\; \sqrt{2\pi N}\left(\tfrac{N}{e}\right)^N \tag{2}$$

oder genauer $\lim_{N\to\infty} \frac{N!}{\sqrt{2\pi N}}(\frac{e}{N})^N = 1$. Zum Beweis von (1) setzen wir

$$x \;:=\; \tfrac{2k-N}{\sqrt{N}} \;=\; x_{N,k} \;\in\; [-\sqrt{N}, +\sqrt{N}] \tag{3}$$

Wir halten dieses $x \in \mathbb{R}$ fest und lassen N nach unendlich gehen (o.B.d.A. $N > x^2$), dann geht offensichtlich auch

$$k \;=\; \tfrac{N+\sqrt{N}\,x}{2} \tag{4}$$

nach unendlich. Zeigen Sie jetzt:

a) Es ist

$$N - k \;=\; \tfrac{N-\sqrt{N}\,x}{2} \tag{5}$$

und für grosse N gilt:

$$\tfrac{1}{2^N}\tbinom{N}{k} \;\approx\; \tfrac{1}{2^N}\,\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sqrt{\tfrac{N}{k(N-k)}}\;\tfrac{N^N}{k^k(N-k)^{N-k}} \tag{6}$$

Benutzen Sie dazu die Stirlingsche Formel (2).

b) Es ist

$$\frac{N}{k} \;=\; \frac{2}{1+\frac{x}{\sqrt{N}}}\,, \qquad \frac{N}{N-k} \;=\; \frac{2}{1-\frac{x}{\sqrt{N}}} \tag{7}$$

c) Weiterhin gilt

$$\frac{1}{2^N}\,\frac{N^N}{k^k(N-k)^{N-k}} \;=\; \frac{1}{(1-\frac{x^2}{N})^{N/2}} \times \frac{(1-\frac{x}{\sqrt{N}})^{\frac{\sqrt{N}\,x}{2}}}{(1+\frac{x}{\sqrt{N}})^{\frac{\sqrt{N}\,x}{2}}} \;\overset{N\to\infty}{\rightarrow}\; e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{8}$$

d) Es ist

$$\Delta x \;:=\; x_{N,k} - x_{N,k-1} \;=\; \tfrac{2}{\sqrt{N}} \tag{9}$$

und

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{N}{k(N-k)}}}{\Delta x} \;=\; 1 \;, \tag{10}$$

für grosse N gilt also

$$\sqrt{\tfrac{N}{k(N-k)}} \;\approx\; \Delta x \;. \tag{11}$$

Mit (6,8) und (11) haben wir dann also:

$$\tfrac{1}{2^N}\binom{N}{k} \;\approx\; e^{-\frac{x^2}{2}}\,\tfrac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}} \tag{12}$$

wobei $x = x_{N,k}$ durch die Formel (3) gegeben ist und das Δx durch die Formel (9).

2.Aufgabe: Wir beweisen (oder wieder eher plausibilisieren) jetzt noch die Stirlingsche Formel (2). Gehen Sie dazu folgendermassen vor:

a) Beweisen Sie durch Induktion und partieller Integration:

$$N! \;=\; \int_0^\infty x^N e^{-x} dx \tag{13}$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Substitution $x = y + N$ und Formel (13):

$$N! \;=\; \left(\tfrac{N}{e}\right)^N \int_{-N}^\infty e^{N\log[1+\frac{y}{N}]\,-\,y}\,dy \tag{14}$$

c) Benutzen Sie dann die Taylor-Entwicklung $\log(1+h) \approx h - \frac{h^2}{2}$, um auf

$$N! \;\approx\; \left(\tfrac{N}{e}\right)^N \int_{-N}^\infty e^{-\frac{y^2}{2N}}\,dy \tag{15}$$

zu kommen.

d) Substituieren Sie schliesslich $y/\sqrt{N} = z$ in Formel (15) und folgern Sie

$$N! \;\approx\; \sqrt{2\pi N}\,\left(\tfrac{N}{e}\right)^N \tag{16}$$

für grosse N.