6. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik I

1.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, $dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ sei das Wiener-Maß und der Erwartungswert bezüglich W ist gegeben durch $\mathsf{E}[f] = \int f(\{x_t\})\,dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$.

a) Berechnen Sie folgende Erwartungswerte ($0 < t \leq T$):

(i) $\mathsf{E}[\,x_t\,]$

(ii) $\mathsf{E}[\,x_t^2\,]$

(iii) $\mathsf{E}[\,x_t^n\,]$ mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

(iv) $\mathsf{E}[\,e^{\sigma x_t}\,]$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$ beliebig.

b) Berechnen Sie folgende Varianzen:

(i) $\mathsf{V}[\,x_t\,]$

(ii) $\mathsf{V}[\,x_t^2\,]$

2.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, $dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ sei das Wiener-Maß und $\mathsf{E}[\ \cdot\ ]$ bezeichne den Erwartungswert bezüglich des Wiener-Wiener-Maßes. Weiter sei $\{S_t\}_{t\geq 0}$ der Preisprozess des Black-Scholes Modells, gegeben durch

$$S_t \;=\; S_0\, e^{\mu t + \sigma x_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathsf{E}[\,S_t\,]$ und die Varianz $\mathsf{V}[\,S_t\,]$.

3.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ sei das Wiener-Maß. Beweisen Sie: Für $t > s$ gilt:

a) $\mathsf{E}[\,x_t - x_s\,] \;=\; 0$.

b) $\mathsf{V}[\,x_t - x_s\,] \;=\; t - s$.

c) $\mathsf{Cov}[\,x_s\,,\,x_t\,] \;=\; \min\{\,s\,,\,t\,\} \;=\; s$.