Hochschule RheinMain — WS 2016/17
Prof. Dr. D. Lehmann

5. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik I

1.Aufgabe: Gauss'sche Integrale: Beweisen Sie die folgenden Formeln

a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \;=\; \sqrt{2\pi}$

Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \;=\; \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \;\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\;\right\}^{1/2}$ und Polarkoordinaten.

b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \;=\; 1$

Dabei heisst $p(x;\mu,\sigma) \;:=\; e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ Dichte der Gauss'schen Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ.

c) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; 1$

Hinweis: $x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = x \times x e^{-\frac{x^2}{2}}$ und partielle Integration.

d) $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; 3.$

e) $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; \begin{cases} (n-1)!! & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

mit $(n-1)!! = (n-1)(n-3)(n-5)\cdots 3\cdot 1$.

f) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\, e^{-\alpha\frac{x^2}{2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{\frac{1}{\alpha}\frac{\lambda^2}{2}}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \alpha > 0.$

Aufgabe 2) Es sei ϕ eine mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ normalverteilte Zufallsvariable.

a) Drücken Sie die Aussage " der Erwartungswert von ϕ ist μ " durch eine exakte mathematische Formel aus und beweisen Sie diese Formel durch explizite Rechnung.

b) Drücken Sie die Aussage " die Varianz von ϕ ist σ^2 " durch eine exakte mathematische Formel aus und beweisen Sie diese Formel durch explizite Rechnung.

..bitte wenden..

Aufgabe 3) Es sei x eine auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallszahl (auf einem Excel-sheet mit englischer Sprach-Einstellung kann man eine solche Zahl etwa mit `x=Rand()` generieren, in VBA muss man die Syntax `x=rnd()` benutzen). Wir ziehen n solche x's, die wir mit $x_1, ..., x_n$ bezeichnen, und definieren die Zufallszahl

$$s_n \quad := \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mu := \mathsf{E}[s_n]$ und die Varianz $\sigma^2 := \mathsf{V}[s_n]$.

b) Wir definieren die normierte Zufallszahl

$$z_n \quad := \frac{s_n - \mu}{\sigma}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von z_n. Für welche n gilt die Gleichung

$$z_n \quad = \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n \; - \; n/2 \quad ?$$

c) Für das n aus Teil (b), generieren Sie 1000 von den z_n's in Excel und erstellen Sie ein Histogram von diesen z_n's. Was wird in einem Histogramm genau dargestellt? In Excel kann man Histogramme mit dem `Frequency()` oder `Häufigkeit()` Befehl (in einem deutschen Excel) erzeugen.

d) Das Histogramm aus (c) ähnelt einer Gauss'schen Glockenkurve. Tatsächlich kann man es sehr gut durch eine Standard-Normalverteilung (Mittelwert $\mu = 0$, Standardabweichung $\sigma = 1$) approximieren, dazu muss man es etwas skalieren. Finden Sie die geeignete Skalierung und stellen Sie das skalierte Histogramm und die Dichte der Standard-Normalverteilung in einem gemeinsamen Diagramm dar.