

4. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

1. Aufgabe: Wir betrachten ein N -Perioden Binomialmodell mit Preisprozess ($k = 1, 2, \dots, N$)

$$S_k = S_{k-1} \times \begin{cases} (1+q) & \text{mit W'keit } p_{\text{up}} = 1/2 \\ (1-q) & \text{mit W'keit } p_{\text{down}} = 1/2 \end{cases}$$

mit $q \in (0, 1)$ (etwa $N = 250$ und $q = 1\%$) und $S_0 = 100$. Berechnen Sie folgende Erwartungswerte:

- a) $E[S_N]$
- b) $E[S_N | \{S_j\}_{j=0}^k]$
- c) $E[\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N S_m]$
- d) $E[\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N S_m | \{S_j\}_{j=0}^k]$
- e) $E[\frac{S_0}{S_N}]$
- f) $E[\frac{S_0}{S_N} | \{S_j\}_{j=0}^k]$

2. Aufgabe: Wir betrachten ein N -Perioden Binomialmodell mit Preisprozess ($k = 1, 2, \dots, N$)

$$S_k = S_{k-1} \times \begin{cases} (1+q) & \text{mit W'keit } p_{\text{up}} = p \\ (1+\text{ret}_{\text{down}}) & \text{mit W'keit } p_{\text{down}} = 1-p \end{cases}$$

mit einer up-Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$.

- a) Für welche Werte des down-returns ret_{down} ist der Preisprozess $\{S_k\}_{k=0}^N$ ein Martingal? Wie gross ist dieser Wert etwa für $p = 3/4$ (hängt dann noch von q ab)?
- b) Berechnen Sie für diesen Fall (allgemeines p , aber ret_{down} so gewählt, dass der Preisprozess ein Martingal ist) noch einmal die sechs Erwartungswerte aus Aufgabe 1.