

3. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

1. Aufgabe: Wir betrachten einen Zeithorizont von 3 Wochen und wir nehmen an, dass sich der Preis $S_k = S(t_k)$ einer Aktie S sich nur wöchentlich ändern kann und dabei nur 2 Einstellungsmöglichkeiten hat. Das heisst genauer, wir betrachten ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess

$$S_k = S_{k-1} \times \begin{cases} (1 + \text{ret}_{\text{up}}) & \text{mit W'keit } p_{\text{up}} \\ (1 + \text{ret}_{\text{down}}) & \text{mit W'keit } p_{\text{down}} = 1 - p_{\text{up}} \end{cases} \quad (1)$$

mit $k = 0, 1, 2, 3$ (und $t_0 = 0$, $t_1 = 1\text{week}$, $t_2 = 2\text{weeks}$, $t_3 = 3\text{weeks}$). Die wöchentlichen returns seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{ret}_{\text{up}} &= +5\% \\ \text{ret}_{\text{down}} &= -5\% \end{aligned}$$

und die (etwa durch eine Zeitreihenanalyse ermittelte) Wahrscheinlichkeit für einen up-move sei 60%, $p_{\text{up}} = 60\%$. Weiter sei $S_0 = 100$.

- a) Skizzieren Sie den Binomial-Baum für dieses Modell und geben Sie in jedem Knotenpunkt den numerischen Wert des Aktienpreises

$$\begin{aligned} S_{k,\ell} &:= S(\text{Zeit} = t_k, \text{number of up moves} = \ell) \\ &= S_0(1 + \text{ret}_{\text{up}})^\ell(1 + \text{ret}_{\text{down}})^{k-\ell} \end{aligned} \quad (2)$$

an.

- b) Betrachten Sie eine Standard-Kauf-Option mit Fälligkeit $t_N = t_3 = 3\text{weeks}$ und payoff

$$H_{\text{call}} = \max\{S_3 - S_0, 0\} \quad (3)$$

Nehmen Sie an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$. Berechnen Sie den Preis dieser Option, indem Sie die Rekursionsformel (2.24) aus dem Skript verwenden.

- c) Berechnen Sie jetzt für jeden Knotenpunkt im Binomial-Baum das $\delta_{k,\ell}$, die Anzahl von Aktien, die man zum Zeitpunkt t_k halten muss, wenn der Aktienpreis $S_{k,\ell}$ ist, damit man den payoff (3) replizieren kann.

- d) Betrachten Sie jetzt die folgenden 2 Preis-Pfade:

$$\text{Pfad}_1 := \{\text{down, up, up}\} \quad (4)$$

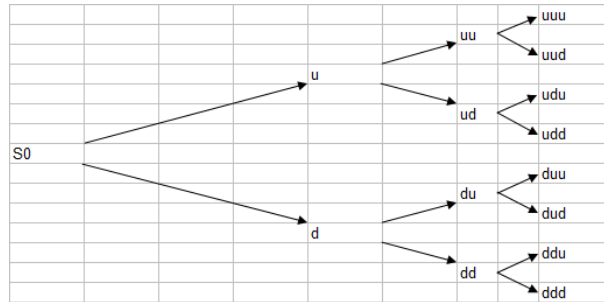
$$\text{Pfad}_2 := \{\text{up, up, down}\} \quad (5)$$

Zeigen Sie jetzt explizit für diese beiden Pfade, dass die replizierende Strategie definiert durch die δ 's aus Teil (c) tatsächlich den option payoff (3) replizieren tut.

2.Aufgabe: Wir betrachten dasselbe 3-Perioden Binomialmodell wie in Aufgabe 1. Berechnen Sie den Preis der (pfadabhängigen) Barrier-Option mit Auszahlungsfunktion

$$H = H(S_1, S_2, S_3) := \begin{cases} 100 & \text{falls } \min_{k=1,2,3} S_k > 92.5 \\ 0 & \text{falls } \min_{k=1,2,3} S_k \leq 92.5 \end{cases} \quad (6)$$

Machen Sie sich dazu zunächst klar, dass es jetzt nicht mehr ausreichend ist, den Binomial-Baum (mit 4 End-Punkten oder ‘Blättern’) aus Aufgabe 1 zu betrachten, sondern Sie müssen folgende Baum-Struktur betrachten,



n -Perioden Binär-Baum mit 2^n Endpunkten, $n = 3$

und an den Knotenpunkten die V_k 's berechnen, mit denen Sie dann mit der Rekursion (2.14) oder (2.24) aus dem Skript (die Zinsen seien wieder null, $r = 0$) den Preis V_0 berechnen können.