Hochschule RheinMain — WS 2016/17

Prof. Dr. D. Lehmann

11. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik I
(Probe-Klausur)

1.Aufgabe (8 Punkte): Ein Investor verfolgt folgende Handelsstrategie: Ist S_k der Schlusskurs einer Aktie am Tag k, so hält er $S_k - S_{k-1}$ Aktien am Ende von Tag k. Am Ende von Tag 0 hält er 0 Aktien. Folgender Preis-Pfad $\{S_0, S_1, ..., S_7\}$ habe sich realisiert:

$$\{100, 102, 105, 103, 99, 98, 95, 97\}$$

Die Position wurde am Ende von Tag 7 zum Schlusskurs von 97 geschlossen. Welchen Betrag hat diese Strategie generiert? Die Zinsen seien $r = 0$.

2.Aufgabe (8 Punkte) : Eine Aktie habe einen Preis von $S_0 = 100$. Wir betrachten einen Zeithorizont von 1 Monat und nehmen an, dass diese Aktie entweder nur nach 120 steigen kann oder auf 80 fallen kann. Wir betrachten einen Standard-Call mit payoff

$$H(S_T) \;=\; \max\{\, S_T - 90\,,\, 0\,\}$$

Dabei ist $S_T \in \{80, 120\}$ der Preis der Aktie in einem Monat.

a) Berechnen Sie den Preis dieser Option.

b) Was muss die Verkäuferin dieser Option tun, damit, egal ob die Aktie steigt oder fällt, sie in jedem Fall in der Lage ist, der Auszahlungsverpflichtung der Option nachzukommen, ohne dabei Verlust zu machen?

Nehmen Sie an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$.

3.Aufgabe (14 Punkte): Gegeben sei ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess

$$S_k \;=\; S_{k-1} \times \begin{cases} (1+20\%) & \text{mit W'keit } 60\% \\ (1-20\%) & \text{mit W'keit } 40\% \end{cases}$$

mit $k = 1, 2, 3$ und $S_0 = 100$. Die Zinsen seien null, $r = 0$.

a) Berechnen Sie sämtliche möglichen Aktienpreise in diesem Model und skizzieren Sie den Binomialbaum dazu, an dessen Knotenpunkten Sie die Aktienpreise eintragen.

b) Betrachten Sie eine Standard-Verkaufs-Option mit Auszahlung

$$H(S_3) \quad := \quad \max\{\, S_0 - S_3 \,,\, 0\,\} \tag{1}$$

Berechnen Sie den Preis dieser Option zur Zeit $k = 0$.

c) Berechnen Sie die Absicherungsstrategie für die Option (1). D.h., berechnen Sie sämtliche δ's. (Sie können die delta's als Bruchzahlen angeben, etwa $\delta = -\frac{23{,}2}{38{,}4}$, oder mit dem Taschenrechner zu $\delta = -0,6042$ umschreiben.)

d) Überprüfen Sie die Absicherungsstrategie aus (c) für die Preis-Pfade $\mathrm{pfad}_1 := \{\mathrm{up}, \mathrm{down}, \mathrm{up}\}$ und $\mathrm{pfad}_2 := \{\mathrm{down}, \mathrm{down}, \mathrm{down}\}$.

4.Aufgabe (10 Punkte): Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, $dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ sei das Wiener-Maß und σ_1 und σ_2 seien reelle Konstanten. Weiter seien t_1 und t_2 zwei Zeiten mit

$$0 < t_1 < t_2 < T$$

Berechnen Sie den Erwartungswert

$$\mathsf{E}_W\left[e^{\sigma_1 x_{t_1} + \sigma_2(x_{t_2} - x_{t_1})}\right] \quad = \quad \int e^{\sigma_1 x_{t_1} + \sigma_2(x_{t_2} - x_{t_1})}\, dW(\{x_\tau\}_{0<\tau\leq T})\,.$$

5.Aufgabe (12 Punkte): Betrachten Sie eine Standard-Kauf- und eine Standard-Verkaufs-Option mit Auszahlung

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{call}}(S_T) \quad &:= \quad \max\{\, S_T - K \,,\, 0\,\} \\ H_{\mathrm{put}}(S_T) \quad &:= \quad \max\{\, K - S_T \,,\, 0\,\} \end{aligned}$$

Die Preisdynamik des Aktienpreisprozesses $\{S_t\}_{t\geq 0}$ sei gegeben durch das Black-Scholes Modell $dS_t/S_t = \mu\, dt + \sigma\, dx_t$ mit $\sigma = 20\%$ und $\mu = 5\%$. Nehmen Sie an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$. Der momentane Aktienpreis sei $S_0 = 100$.

a) Berechnen Sie die $t = 0$ Preise $V^{\mathrm{BS}}_{\mathrm{call,90}}$ und $V^{\mathrm{BS}}_{\mathrm{put,90}}$ dieser Optionen für eine Laufzeit von $T = 1$ Jahr und Ausübungspreis $K = 90$ mit Hilfe der Black-Scholes Formeln aus dem Skript. Berechnen Sie weiterhin die Differenz $V^{\mathrm{BS}}_{\mathrm{call,90}} - V^{\mathrm{BS}}_{\mathrm{put,90}}$.

b) Berechnen Sie die $t = 0$ Preise $V^{\mathrm{BS}}_{\mathrm{call,120}}$ und $V^{\mathrm{BS}}_{\mathrm{put,120}}$ dieser Optionen für eine Laufzeit von $T = 4$ Jahren und Ausübungspreis $K = 120$ mit Hilfe der Black-Scholes Formeln aus dem Skript. Berechnen Sie weiterhin die Differenz $V^{\mathrm{BS}}_{\mathrm{call,120}} - V^{\mathrm{BS}}_{\mathrm{put,120}}$.

c) Beweisen Sie: Für beliebige Laufzeit $T > 0$ und beliebigen Ausübungspreis $K > 0$ gilt (für $r = 0$):

$$V^{\mathrm{BS}}_{\mathrm{call,K}} - V^{\mathrm{BS}}_{\mathrm{put,K}} \quad = \quad S_0 - K$$

Skizzieren Sie dazu den payoff $H_{\mathrm{diff}}(S_T) := H_{\mathrm{call}}(S_T) - H_{\mathrm{put}}(S_T)$ und überlegen Sie sich, durch welche einfache Handelsstrategie dieser payoff repliziert werden kann. Welches Geld brauchen Sie, um diese einfache Handelsstrategie anzulegen?

6.Aufgabe (8 Punkte): Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und a und b seien reelle Konstanten. Weiter sei

$$F(x_t, t) \;:=\; x_t^4 \;-\; a\,t\,x_t^2 \;+\; b\,t^2$$

Bestimmen Sie die Konstanten a und b so, dass sich F als reines Ito-Integral schreiben lässt. Das heisst, F soll die Darstellung

$$F(x_T, T) \;=\; \int_0^T \delta(x_t, t)\, dx_t$$

haben mit einer geeigneten Funktion $\delta(x_t, t)$. Wenden Sie dazu die Ito-Formel auf die Funktion $F(x_t, t)$ an und bestimmen Sie explizit die Funktion $\delta(x_t, t)$ und die Konstanten a und b.