Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2016/17

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik I

1.Aufgabe: Es sei $H = H(S)$ ein option payoff und $V = V(S,t)$ sei eine Lösung der Black-Scholes PDE

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV &= 0 \\ V(S,T) &= H(S) \end{aligned}$$

Weiter sei ein stochastischer Preisprozess $\{S_t\}_{t\geq 0}$ gegeben durch das Black-Scholes Modell mit Drift μ,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dx_t$$

Es sei $V_0 = V(S_0, 0)$ der Optionspreis von H, $\delta_t = \delta(S_t, t) := \frac{\partial V(S_t,t)}{\partial S_t}$ und $s_t := e^{-rt} S_t$ sei der diskontierte Preisprozess. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$e^{-rT} H(S_T) = V_0 + \int_0^T \delta_t\, ds_t$$

erfüllt ist. Diese Gleichung besagt, dass im Black-Scholes Modell jede Optionsauszahlung durch eine geeignete Handelsstrategie repliziert werden kann.

Hinweis: In der Vorlesung haben wir diese Aussage für den Fall $r = 0$ bewiesen, verallgemeinern Sie also diesen Beweis auf den Fall $r \neq 0$.

2.Aufgabe: Es sei x_t eine Brownsche Bewegung. Beweisen Sie folgende Identitäten mit Hilfe der Ito-Formel:

a) $\int_0^t x_s\, dx_s = \frac{x_t^2 - t}{2}$

b) $\int_0^t x_s^2\, dx_s = \frac{x_t^3}{3} - \int_0^t x_s\, ds$

c) $\int_0^t s\, dx_s = t\, x_t - \int_0^t x_s\, ds$

3.Aufgabe: Es sei $t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, ..., N_T = T/\Delta t$ und $\{x_t\}_{0<t\leq T}$ sei eine Brownsche Bewegung. Überprüfen Sie die Relation

$$\sum_{k=1}^{N_t} f(x_{t_{k-1}}, t_{k-1}) \left(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}\right)^2 \quad \stackrel{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \quad \int_0^t f(x_s, s)\, ds \tag{1}$$

mit einer Excel-Simulation für die folgenden Funktionen:

$$\begin{array}{llll} (\mathbf{i}) & f(x_t,t) = t^2, & t \in [0,1], & \Delta t = 1/1000 \\ (\mathbf{ii}) & f(x_t,t) = x_t^2, & t \in [0,1], & \Delta t = 1/1000 \end{array}$$

Erstellen Sie dazu ein Diagramm, welches die linke und die rechte Seite von (1) als Funktion von $t = t_k \in [0,1]$ darstellt, $k = 1, 2, ..., 1000$. Im Fall von (i) können Sie die rechte Seite von (1) offensichtlich explizit berechnen. Im Fall von (ii) müssen Sie die rechte Seite von (1) durch die Riemannsche Summe

$$\int_0^t x_s^2 \, ds \;\approx\; \sum_{k=1}^{N_t} x_{t_{k-1}}^2 \, \Delta t \tag{2}$$

approximieren. Ist es wesentlich, dass auf der linken Seite von (1) die Funktion f an der Stelle t_{k-1} evaluiert wird, oder kann man da etwa auch $f(x_{t_k}, t_k)$ nehmen?

Die Gültigkeit der Gleichung (1) wird in kompakter Form durch die Gleichung

$$(dx_t)^2 \;=\; dt \tag{3}$$

wiedergegeben.