

## 1. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

**1. Aufgabe:** Eine Aktie habe einen Preis von  $S_0 = 100$ . Wir betrachten einen Zeithorizont von 1 Monat und nehmen an, dass diese Aktie entweder nur nach 110 steigen kann oder auf 80 fallen kann. Wir betrachten eine Standard-Verkaufs-Option (engl.: Put Option) mit Fälligkeit (engl.: maturity)  $T = 1$  Monat und Ausübungspreis (engl.: strike)  $K = S_0 = 100$ . Die Auszahlungsfunktion (engl.: payoff) dieser Option ist also gegeben durch

$$H(S_T) = \max\{S_0 - S_T, 0\}$$

Dabei ist  $S_T \in \{80, 110\}$  der Preis der Aktie in einem Monat.

- Berechnen Sie den Preis dieser Option.
- Was muss der Verkäufer dieser Option (typischerweise eine Bank) tun, damit, egal ob die Aktie steigt oder fällt, er in jedem Fall in der Lage ist, der Auszahlungsverpflichtung der Option nachzukommen, ohne dabei Verlust zu machen?

Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem von 2 Gleichungen mit 2 Variablen auf (was sind diese beiden Variablen?) und lösen Sie dann dieses Gleichungssystem. Die Zinsen seien  $r = 0$  (wieso spielen Zinsen hier überhaupt eine Rolle?).

**2. Aufgabe:** Wir betrachten folgende Optionen  $H$  auf den EuroStoxx50 (SX5E) mit Laufzeit  $T = 1$  Jahr, Start-Tag  $T_0 = 1.$ Juli 2014 und End-Tag  $T_N = 30.$ Juni 2015. Dabei sei  $S_{T_i}$  der Schlusskurs des SX5E am Beobachtungstag  $T_i$ .

- Eine Standard-Kauf und eine Standard-Verkaufs-Option mit Ausübungspreis  $K = S_{T_0}$ ,

$$H_{\text{call}} = \max\{S_{T_N} - S_{T_0}, 0\} \quad \text{und} \quad H_{\text{put}} = \max\{S_{T_0} - S_{T_N}, 0\}$$

- Eine All-Time-High Option mit täglicher Beobachtung (d.h. das Maximum wird über alle Handelstage im Jahr genommen) mit Auszahlung

$$(i) \quad H_{\text{ATH}}^{\text{abs}} = \max_{t \in \{T_0, T_1, \dots, T_{N-1}, T_N\}} S_t - S_{T_0}$$

$$(ii) \quad H_{\text{ATH}}^{\text{perf}} = 100 \times \max_{t \in \{T_0, T_1, \dots, T_{N-1}, T_N\}} \frac{S_t}{S_{T_0}}$$

- Eine Average-Option mit monatlichen Beobachtungstagen und Auszahlung

$$H_{\text{ave}} = \max\left\{\frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} S_{T_j} - S_{T_0}, 0\right\}$$

Dabei bezeichnet hier  $T_j$  den letzten Handelstag im Monat  $j$  (der erste Monat ist also der Juli 2014 und der 12. und letzte Monat ist der Juni 2015).

Berechnen Sie jeweils die Auszahlung, die sich bei Fälligkeit der Option am 30. Juni 2015 realisiert hat. Sie benötigen dazu offensichtlich die Schlusskurse  $S_t$  des SX5E, des EuroStoxx50. Schauen Sie sich dazu etwas im Internet um und versuchen Sie, diese Kursdaten zu finden.

**3. Aufgabe:** Ein Investor verfolgt folgende Handelsstrategie: Ist  $S_k$  der Schlusskurs einer Aktie am Tag  $k$ , so hält er  $S_0 - S_k$  Aktien am Ende von Tag  $k$ . Folgender Preis-Pfad  $\{S_0, S_1, \dots, S_7\}$  habe sich realisiert:

$$\{100, 98, 95, 97, 101, 101, 105, 108\}$$

Die Position wurde am Ende von Tag 7 zum Schlusskurs von 108 geschlossen. Welchen Betrag hat diese Strategie generiert? Die Zinsen seien  $r = 0$ .