Chapter 0: The Main Idea:
Replication of Financial Derivatives

Die Grundidee der Optionspreisbewertung

- Wir betrachten eine Aktie mit einem Zeithorizont von 1 Woche:

$t = 0$ $\qquad\qquad$ $t = T = 1$ Woche

$S_T = 105$

$p = 60\%$

$S_0 = 100$

$1\text{-}p = 40\%$

$S_T = 95$

Die Grundidee der Optionspreisbewertung

- Wir betrachten folgende Option:

t = 0 | t = T = 1 Woche | Auszahlung der Option

$S_T = 105$ | 5 Euro

$p = 60\%$

$S_0 = 100$

$1\text{-}p = 40\%$

$S_T = 95$ | 0 Euro

Die Grundidee der Optionspreisbewertung

- Etwas allgemeiner ist eine (Aktien-)Option also eine Auszahlung in der Zukunft, die vom Aktienpreis in der Zukunft abhaengt,

$$\text{option\_payoff} = f(S_T)$$

  wobei f eine beliebige Funktion ist.

- In dem Beispiel von der letzten slide koennte man etwa schreiben:

$$\text{option\_payoff} = f(S_T) = \max\{ S_T - 100 , 0 \}$$

- Zurueck zum Beispiel:

Die Grunddidee der Optionspreisbewertung

$t = 0$ $\qquad$ $t = T = 1$ Woche $\qquad$ option_payoff

$S_T = 105$ $\qquad$ 5 Euro

$p = 60\%$

$S_0 = 100$

$1\text{-}p = 40\%$

$S_T = 95$ $\qquad$ 0 Euro

- Was wuerden Sie fuer diese Option jetzt, bei $t = 0$, bezahlen?
- Hat eine solche Option ueberhaupt einen eindeutig definierten Preis, oder richtet sich das vielleicht einfach nur nach Angebot und Nachfrage?

Die Grundidee der Optionspreisbewertung

- Man koennte meinen:

  Optionspreis = 60% * 5 Euro + 40% * 0 Euro = 3 Euro .

- Das ist falsch wie wir gleich sehen werden. Nehmen wir an, das waere richtig. Es koennte folgendes passieren:

  Ein grosser Investor moechte 100 Millionen von diesen Optionen bei einer Bank kaufen. Die Bank bekaeme also bei t = 0 300 Millionen Euro.

  Die Zeit von 1 Woche vergeht und die Aktie ist entweder gestiegen oder gefallen.

Die Grundidee der Optionspreisbewertung

- Ist die Aktie gefallen, muesste die Bank nichts an den Investor zahlen und haette auf einen Schlag 300 Mio Gewinn gemacht.
- Ist die Aktie jedoch gestiegen, muesste die Bank 500 Mio an den Investor zahlen und haette auf einen Schlag 200 Mio Verlust gemacht.

- Derartige Risiken wollen Banken nicht eingehen. Sondern, aehnlich wie ein Autohaendler, moechte eine Bank ein paar Prozent Gewinn pro verkaufter Option machen, egal, ob die zu Grunde liegende Aktie steigt oder faellt.
- Es ist ein fundamentales Resultat der Finanzmathematik, dass das tatsaechlich moeglich ist: Und zwar muss die Bank dazu in diesem Beispiel folgendes machen:

Die Grundidee der Optionspreisbewertung

- Als Optionspreis muss sie nur 2,50 Euro verlangen (also keine 3 Euro).
- Dann muss die Bank bei $t = 0$ eine halbe Aktie kaufen.
- Bei Faelligkeit der Option bei $t = T = 1$ Woche muss die Bank diese halbe Aktie dann wieder verkaufen:

BankPortfolio_heute = 2,50 = 2,50 – 50 + 50

= -47,50(cash) + halbe Aktie

105/2 = -47,50+52,50 = 5 Euro

BankPortfolio_1Woche = -47,50(cash) +

95/2 = -47,50+47,50 = 0 Euro

Also:

BankPortfolio_1Woche = option_payoff

Die Grundidee der Optionspreisbewertung

- Also: Mit der Handelsstrategie “Kaufe eine halbe Aktie” ist die Bank in der Lage, den option payoff exakt zu replizieren.
- Der faire Preis einer Option ist dann das Geld, was man braucht, um eine replizierende Strategie aufsetzen zu koennen.
- In dem Beispiel waeren das also nur 2,50 Euro.
- Der tatsaechliche Preis einer Option ist dann vielleicht 2,55 Euro oder 2,53 Euro oder 2,52 Euro...

- Wenn man diese Idee in einem entsprechenden mathematischen Modell formalisiert, was tatsaechlich von Banken angewendet werden kann, sieht das folgendermassen aus:

Die Grundidee der Optionspreisbewertung

Theorem: Suppose that the real world (not risk neutral) processes for some stock S_t, variance ν_t and short term interest rate r_t are given by

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mu\,dt + \sqrt{\nu_t}\,dB_t^S \\ d\nu_t &= \alpha(\nu_t,t)\,dt + \beta\sqrt{\nu_t}\,dB_t^\nu \\ dr_t &= m(r_t,t)\,dt + \sigma\,dB_t^r \end{aligned} \tag{52}$$

with correlations

$$\begin{aligned} dB^S \cdot dB^\nu &= \rho_{S,\nu}\,dt \\ dB^S \cdot dB^r &= \rho_{S,r}\,dt \\ dB^\nu \cdot dB^r &= \rho_{\nu,r}\,dt \end{aligned} \tag{53}$$

Let $H = H(S_T)$ be the payoff of some derivative which is to be priced and let

$$v_t = v_0 + \int_0^t \delta_u\,ds_u + \int_0^t \eta_u\,dc_u + \int_0^t \rho_u\,dp_u \tag{54}$$

be the discounted time t value of a self financing strategy which holds at time u δ_u stocks, η_u plain vanilla options $C(S_u,\nu_u,r_u,u)$ and ρ_u zero bonds $P(r_u,u)$. Then the following statements hold:

Die Grundidee der Optionspreisbewertung

a) If the hedge instruments P and C are consistently priced in the model (52), then the functions

$$\begin{aligned} \tilde{m}(r,t) &:= -\frac{\frac{\sigma^2}{2}P_{rr}+P_t-rP}{P_r} && (55)\\ \tilde{\alpha}(S,\nu,r,t) &:= -\frac{rSC_S+\tilde{m}C_r+\frac{1}{2}(S^2\nu C_{SS}+\beta^2\nu C_{\nu\nu}+\sigma^2 C_{rr})}{C_\nu} \\ &\quad -\frac{\beta\nu S\rho_{S,\nu}C_{S\nu}+\sqrt{\nu}\sigma S\rho_{S,r}C_{Sr}+\beta\sqrt{\nu}\sigma\rho_{\nu,r}C_{\nu r}+C_t-rC}{C_\nu} && (56)\end{aligned}$$

have to be some universal functions independent of the particular choice of P and C.

b) Define the differential operator (for some function $V = V(S,\nu,r,t)$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{risk neutral}}V &:= rSV_S+\tilde{\alpha}V_\nu+\tilde{m}V_r+\tfrac{1}{2}\left(S^2\nu V_{SS}+\beta^2\nu V_{\nu\nu}+\sigma^2 V_{rr}\right) && (57)\\ &\quad +\beta\nu S\rho_{S,\nu}V_{S\nu}+\sqrt{\nu}\sigma S\rho_{S,r}V_{Sr}+\beta\sqrt{\nu}\sigma\rho_{\nu,r}V_{\nu r}+V_t-rV\end{aligned}$$

Suppose that V is a solution of the PDE

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{risk neutral}}V &= 0 && (58)\\ V(S,\nu,r,T) &= H(S_T)\end{aligned}$$

Die Grundidee der Optionspreisbewertung

and define

$$\eta := \frac{V_\nu}{C_\nu} \quad (59)$$

$$\delta := V_S - \eta C_S \quad (60)$$

$$\rho := \frac{V_r}{P_r} - \eta \frac{C_r}{P_r} \quad (61)$$

Then (54) is in fact a replicating strategy for H. That is,

$$V(S,\nu,r,0) + \int_0^T \delta_t \, ds_t + \int_0^T \eta_t \, dc_t + \int_0^T \rho_t \, dp_t = e^{-\int_0^T r_t dt} H(S_T) \quad (62)$$

where

$$\begin{aligned} s_t &= e^{-\int_0^T r_t dt} S_t \\ c_t &= e^{-\int_0^T r_t dt} C(S_t,\nu_t,r_t,t) \\ p_t &= e^{-\int_0^T r_t dt} P(r_t,t) \end{aligned} \quad (63)$$

and (62) holds for all real world processes S_t, ν_t and r_t which are given by (52) (and which are to be substituted on the right hand side of (63)). In particular, the option price

$$\text{option price} = V(S,\nu,r,0) \quad (64)$$

given by the solution of (58,69), is independent of μ, m and α but only depends on $\tilde{m}, \tilde{\alpha}$ and the vol and correlation parameters.

Die Grundidee der Optionspreisbewertung

c) Let

$$H = H\left(\{S_t, r_t\}_{0\leq t\leq T}\right) \tag{65}$$

be the payoff of some exotic option. Then the price of this option is given by

$$\text{price}(H) \;=\; \tilde{\mathsf{E}}\left[e^{-\int_0^T \tilde{r}_t dt}\, H\left(\{\tilde{S}_t, \tilde{r}_t\}_{0\leq t\leq T}\right)\right] \tag{66}$$

where $(\tilde{S}_t, \tilde{\nu}_t, \tilde{r}_t)$ are given by the risk neutral SDE system

$$\begin{aligned} \tfrac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} &= \tilde{r}_t\, dt + \sqrt{\tilde{\nu}_t}\, d\tilde{B}_t^S \\ d\tilde{\nu}_t &= \tilde{\alpha}(\tilde{\nu}_t, t)\, dt + \beta\sqrt{\tilde{\nu}_t}\, d\tilde{B}_t^\nu \\ d\tilde{r}_t &= \tilde{m}(\tilde{r}_t, t)\, dt + \sigma\, d\tilde{B}_t^r \end{aligned} \tag{67}$$

with correlated Brownian motions

$$\begin{aligned} d\tilde{B}^S \cdot d\tilde{B}^\nu &= \rho_{S,\nu}\, dt \\ d\tilde{B}^S \cdot d\tilde{B}^r &= \rho_{S,r}\, dt \\ d\tilde{B}^\nu \cdot d\tilde{B}^r &= \rho_{\nu,r}\, dt \end{aligned} \tag{68}$$

Here $\tilde{m}$ and $\tilde{\alpha}$ are the universal functions (55,56).