Vektorfelder und ihre Flüsse

Aufgabe (7.1) Für eine konvexe offene Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ sei $C^k(\Omega)$ die Menge aller C^k-Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Eine lineare Abbildung $D : C^k(\Omega) \to C^{k-1}(\Omega)$ heißt **Derivation**, wenn die Produktregel $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$ gilt. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Ist X ein C^k-Vektorfeld auf Ω, so ist durch

$$(L_X f)(p) \;:=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f\big(\varphi_t(p)\big) \;=\; f'(p)X(p)$$

eine Derivation $L_X : C^k(\Omega) \to C^{k-1}(\Omega)$ definiert.

(b) Gilt $X_1 \neq X_2$, so gilt auch $L_{X_1} \neq L_{X_2}$; die Zuordnung $X \mapsto L_X$ ist also injektiv (weswegen man X mit L_X identizieren und daher Vektorfelder als Differentialoperatoren erster Ordnung auffassen kann).

(c) Ist $D : C^k(\Omega) \to C^{k-1}(\Omega)$ eine Derivation und ist c eine konstante Funktion, so gilt $D(c) = 0$.

(d) Ist $D : C^k(\Omega) \to C^{k-1}(\Omega)$ eine Derivation, so gibt es ein C^k-Vektorfeld X mit $D = L_X$. **Hinweis:** Wir halten einen Punkt $p \in \Omega$ und eine Funktion $f \in C^k(\Omega)$ fest und definieren für $q \in \Omega$ dann

$$g_i(q) \;:=\; \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}\big((1-t)p + tq\big)\,\mathrm{d}t.$$

Zeige, daß dann $f = f(p) + \sum_{i=1}^d \big(x_i - x_i(p)\big) g_i$ gilt, und wende D auf diese Gleichung an!

Aufgabe (7.2) Es seien X ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M und $f : M \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Zeige: Ist φ_t der lokale Fluß von X, so ist der lokale Fluß von fX gegeben durch $\Phi_s(p) = \varphi_{t(s)}(p)$, wobei $s \mapsto t(s)$ gegeben ist als die Umkehrfunktion von

$$s(t) \;:=\; \int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{f\big(\varphi_\tau(p)\big)}\,.$$

Was bedeutet diese Aussage, wenn f konstant ist?

Aufgabe (7.3) Gegeben sei ein C^k-Vektorfeld X auf einer Mannigfaltigkeit M mit lokalem Fluß (φ_t). Es sei $K : [0,\infty) \times M \hookrightarrow M$ eine Abbildung, die auf einer offenen Umgebung von $\{0\} \times M$ definiert ist; wir schreiben $K_\varepsilon(x)$ statt $K(\varepsilon, x)$. Die folgenden Bedingungen mögen gelten:

(1) $K_0 = \mathrm{id}_M$;
(2) $\partial K(\varepsilon,x)/\partial\varepsilon$ existiere und sei stetig;
(3) $X(p) = \partial K(\varepsilon,x)/\partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ für alle $p \in M$.

Zeige, daß dann die folgenden Aussagen gelten!

(a) Ist $|t|$ genügend klein, so ist sowohl $\varphi_t(p)$ als auch $K^n_{t/n}(p)$ für hinreichend großes n definiert (im Sinne einer n-fachen Hintereinanderausführung), und es gilt

$$(\star) \qquad \varphi_t(p) \;=\; \lim_{n\to\infty} K^n_{t/n}(p).$$

(b) Ist $\varphi_t(p)$ für alle $t \in [0,T]$ definiert, so ist die Konvergenz in $(\star)$ gleichmäßig auf einer Umgebung von $\{\varphi_t(p) \mid t \in [0,T]\}$.

(c) Sind auf einem Intervall $[0,T]$ und für genügend große n die Ausdrücke $K^n_{t/n}(p)$ definiert, existiert $\alpha(t) := \lim_{n\to\infty} K^n_{t/n}(p)$ und ist die dadurch definierte Funktion $\alpha : [0,T] \to M$ stetig, so existiert auch $\varphi_t(p)$ für $0 \le t \le T$, und $(\star)$ gilt für $0 \le t \le T$.

Aufgabe (7.4) Es seien X und Y Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M mit den lokalen Flüssen φ_t und ψ_t. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Der lokale Fluß von $X + Y$ ist gegeben durch

$$\Phi_t(p) \;=\; \lim_{n\to\infty} (\varphi_{t/n} \circ \psi_{t/n})^n p\,.$$

(Was bedeutet dies, falls $[X,Y] = 0$ gilt?)

(b) Der lokale Fluß von $[X,Y]$ ist gegeben durch

$$\Phi_t(p) \;=\; \lim_{n\to\infty} (\psi_{-\sqrt{t/n}} \circ \varphi_{-\sqrt{t/n}} \circ \psi_{\sqrt{t/n}} \circ \varphi_{\sqrt{t/n}})^n(p).$$

Aufgabe (7.5) Betrachte jeweils auf $\mathbb{R}^2$ die folgenden Vektorfelder X und Y, berechne deren lokale Flüsse (φ_t) und ψ_t sowie die Lieklammer $[X,Y]$.

(a) $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}, \quad Y = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$

(b) $X = \dfrac{\partial}{\partial x}, \quad Y = x\dfrac{\partial}{\partial y}$

Aufgabe (7.6) Betrachte auf $\mathbb{R}^3$ die Vektorfelder

$$X = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}, \quad Z = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Es sei $\mathfrak{V}$ die Menge aller Vektorfelder der Form $aX + bY + cZ$ mit reellen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Zeige, daß $\mathfrak{V}$ abgeschlossen unter der Bildung von Lieklammern ist und daher eine Lie-Algebra bildet.

(b) Zeige, daß durch $aX + bY + cZ \mapsto (a,b,c)^T$ ein Liealgebrenisomorphismus $\mathfrak{V} \to \mathbb{R}^3$ gegeben ist, wobei die Lieklammer in $\mathbb{R}^3$ durch Kreuzproduktbildung gegeben ist.

(c) Beschreibe den lokalen Fluß eines Vektorfeldes $aX + bY + cZ$.

Aufgabe (7.7) Es sei $M := \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ der Konfigurationsraum eines Fahrzeugs. Wir betrachten die folgenden Vektorfelder auf M.

$$\begin{aligned}
S &:= \frac{\partial}{\partial\theta},\\
D &:= \cos(\varphi+\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\varphi+\theta)\frac{\partial}{\partial y} + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
W &:= -\sin(\varphi+\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(\varphi+\theta)\frac{\partial}{\partial y} + \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
G &:= -\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Berechne die Lieklammern zwischen diesen Vektorfeldern!

Aufgabe (7.8) Es seien X, Y Vektorfelder unf f, g reellwertige Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit M. Beweise die Formel

$$[fX, gY] \;=\; fg[X,Y] + (fX)gY - (Yf)gX\,.$$

Aufgabe (7.9) Es seien (φ_{ts}) ein lokaler Fluß auf einer Mannigfaltigkeit M sowie (Φ_{ts}) und (Ψ_{ts}) der zugehörige Tangentialfluß bzw. Kotangentialfluß, definiert durch

$$\begin{aligned}\Phi_{ts}(p,v) &:= \big(\varphi_{ts}(p), \varphi'_{ts}(p)v\big) \quad \big((p,v)\in TM\big),\\ \Psi_{ts}(p,\lambda) &= \big(\varphi_{ts}(p), \lambda\circ\varphi'_{ts}(p)^{-1}\big) \quad \big((p,\lambda)\in T^\star M\big).\end{aligned}$$

Rechne nach, daß es sich dabei tatsächlich wieder um lokale Flüsse handelt, daß also die Bedingungen $\Phi_{tt} = \mathrm{id}$, $\Psi_{tt} = \mathrm{id}$, $\Phi_{t_3t_2}\circ\Phi_{t_2t_1} = \Phi_{t_3t_1}$ sowie $\Psi_{t_3t_2}\circ\Psi_{t_2t_1} = \Psi_{t_3t_1}$ gelten.

Aufgabe (7.10) Es sei (φ_{ts}) ein lokaler Fluß auf einer Mannigfaltigkeit M.

(a) Für welche Diffeomorphismen $\Phi : M\to M$ ist durch $\psi_{ts} := \Phi\circ\varphi_{ts}$ wieder ein lokaler Fluß auf M gegeben?

(b) Es sei $\Phi : M\to N$ ein Diffeomorphismus. Zeige, daß dann
$$\psi_{ts} \;:=\; \Phi\circ\varphi_{ts}\circ\Phi^{-1}$$
ein lokaler Fluß auf N ist. Wie ergibt sich das zu diesem Fluß gehörige Vektorfeld aus demjenigen, das zu dem Fluß (φ_{ts}) gehört?

(c) Nun sei speziell $M = \mathbb{R}^n$. Zeige, daß für jeden festen Punkt $x_0\in\mathbb{R}^n$ durch $\psi_{ts}(p) := \varphi_{ts}(p-x_0)+x_0$ wieder ein lokaler Fluß auf $\mathbb{R}^n$ gegeben ist.

Aufgabe (7.11) Es sei $f : \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ eine reelle Funktion von der Klasse C^1. Zeige, daß durch

$$\varphi_t(z) \;:=\; e^{itf(|z|)}z$$

ein lokaler Fluß auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ gegeben ist. Wie lautet dieser lokale Fluß, wenn man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert? Warum wird der Nullpunkt entfernt?

Aufgabe (7.12) Es seien $f, g : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ Vektorfelder der Klasse C^2 mit den zugehörigen lokalen Flüssen (φ_t) bzw. (ψ_t). Ferner sei ein fester Punkt $p\in\mathbb{R}^n$ gegeben. Bestimme für die Funktion $t\mapsto(\psi_{-t}\circ\varphi_{-t}\circ\psi_t\circ\varphi_t)(p)$ das Taylorpolynom zweiter Ordnung.

Aufgabe (7.13) Es seien $f, g : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ Vektorfelder. Zeige:

(a) Sind f und g konstant, so ist $[f,g]$ identisch Null.

(b) Ist eines der Vektorfelder f, g affin und das andere konstant, so ist $[f,g]$ konstant.

(c) Sind f und g affin, so ist auch $[f,g]$ affin.

Aufgabe (7.14) Wir betrachten ein lineares zeitinvariantes Kontrollsystem

$$\dot x(t) \;=\; Ax(t)+Bu(t) \;=\; Ax(t)+u_1(t)b_1+\cdots+u_m(t)b_m$$

mit $x\in\mathbb{R}^n$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ und $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$. Bestimme die von den einzelnen Vektorfeldern $f_i : x\mapsto Ax+u_ib_i$ (mit einem festen Wert u_i) erzeugte Liealgebra. Zeige, daß diese Liealgebra aufgespannt wird von den Spalten der Kalman-Matrix $[B\mid AB\mid A^2B\mid\cdots\mid A^{n-1}B]$. Was bedeutet dies aus kontrolltheoretischer Perspektive?

Aufgabe (7.15) Wir betrachten ein lineares Kontrollsystem

$$\dot x(t) \;=\; A(t)x(t)+B(t)u(t)$$

mit $x\in\mathbb{R}^n$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ und $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$. Bei einer gegebenen Anfangsbedingung $x(t_0)=x_0$ sei

$$\mathfrak{U} \;:=\; \{u\in L^\infty\big([t_0,\infty),\mathbb{R}^m\big) \mid \|u\|_\infty\le 1\}$$

die Menge der zulässigen Steuerungen; die zu der Steuerung $u\in\mathfrak{U}$ gehörige Trajektorie sei x_u. Zeige, daß für jeden Zeitpunkt $t\ge t_0$ die Erreichbarkeitsmenge

$$R_t \;:=\; \{x_u(t)\mid u\in\mathfrak{U}\}$$

konvex und kompakt ist.

Aufgabe (7.16) Ein Raketenwagen der Masse $m=1$ fahre auf geradlinigen Gleisen; seine Beschleunigung werde als Steuervariable aufgefaßt und unterliege der Bedingung $|u|\le 1$. Bezeichnet $x(t)$ die Position des Wagens zur Zeit t, so gilt also $\ddot x(t)=u(t)$. Bezeichnen wir mit $y(t):=\dot x(t)$ die Geschwindigkeit des Wagens zur Zeit t, so erhalten wir das lineare Kontrollsystem

$$\begin{bmatrix}\dot x\\ \dot y\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u.$$

Es sei $\big(x(0),y(0)\big)=(0,0)$; d.h., der Wagen befindet sich zum Zeitpunkt $t=0$ im Nullpunkt und sei in Ruhe. Bestimme für einen beliebigen Zeitpunkt t die Erreichbarkeitsmenge R_t! Begründe, warum $R_{t_1}\subseteq R_{t_2}$ für $t_1<t_2$ gelten muß.

Hinweis: Benutze das Pontrjagin-Prinzip, um den Rand ∂R_t zu bestimmen.

Aufgabe (7.17) Berechne die Erreichbarkeitsmengen R_T für das Kontrollsystem

$$\begin{bmatrix}\dot x\\ \dot y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u&-v\\v&u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x(0)\\y(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

mit den Kontrollbeschränkungen $|u(t)|\le 1/\pi$ und $|v(t)|\le 1$. Zeige insbesondere, daß es für jeden Zeitpunkt $T>0$ Randpunkte von R_T gibt, durch die man keine Gerade so legen kann, daß R_T lokal auf einer Seite dieser Geraden liegt. Warum ist das kein Widerspruch zum Pontrjaginschen Maximumprinzip?