Aufgabenblatt 6 zur Vorlesung "Analysis auf Mannigfaltigkeiten"

Aufgabe (6.1) Wir betrachten das Ellipsoid $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x/3)^2 + (y/2)^2 + z^2 = 1\}$. Wir definieren Kartenbereiche

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \{(x,y,z) \in M \mid x > 0\} \quad (\text{“rechts”}),\\
U_2 &:= \{(x,y,z) \in M \mid x < 0\} \quad (\text{“links”}),\\
U_3 &:= \{(x,y,z) \in M \mid y > 0\} \quad (\text{“hinten”}),\\
U_4 &:= \{(x,y,z) \in M \mid y < 0\} \quad (\text{“vorn”}),\\
U_5 &:= \{(x,y,z) \in M \mid z > 0\} \quad (\text{“oben”}),\\
U_6 &:= \{(x,y,z) \in M \mid z < 0\} \quad (\text{“unten”}),
\end{aligned}$$

Parameterbereiche

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &:= \Omega_2 := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u/2)^2 + z^2 < 1\},\\
\Omega_3 &:= \Omega_4 := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u/3)^2 + v^2 < 1\},\\
\Omega_5 &:= \Omega_6 := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u/3)^2 + (v/2)^2 < 1\}
\end{aligned}$$

und Abbildungen $\psi_i : U_i \to \Omega_i$ durch

$$\begin{aligned}
\psi_1(x,y,z) &:= (y,z),\\
\psi_2(x,y,z) &:= (y,z),\\
\psi_3(x,y,z) &:= (x,z),\\
\psi_4(x,y,z) &:= (x,z),\\
\psi_5(x,y,z) &:= (x,y),\\
\psi_6(x,y,z) &:= (x,y).
\end{aligned}$$

Zeige, daß $\mathfrak{A} := \{(U_i,\psi_i) \mid 1 \le i \le 6\}$ ein C^∞-Atlas für M ist und daß die von $\mathfrak{A}$ bestimmte C^∞-Struktur auf M die gleiche ist, die M als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ erbt.

Aufgabe (6.2) Es sei $M = \mathfrak{P}^2(\mathbb{R})$ die reelle projektive Ebene. Wir definieren die Kartenbereiche

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \{[x:y:z] \mid x \neq 0\},\\
U_2 &:= \{[x:y:z] \mid y \neq 0\},\\
U_3 &:= \{[x:y:z] \mid z \neq 0\}
\end{aligned}$$

und die Kartenabbildungen $\psi_i : U_i \to \mathbb{R}^2$, die folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned}
\psi_1([x:y:z]) &:= (y/x,\ z/x),\\
\psi_2([x:y:z]) &:= (z/y,\ x/y),\\
\psi_3([x:y:z]) &:= (x/z,\ y/z).
\end{aligned}$$

Zeige, daß $\mathfrak{A} := \{(U_i,\psi_i) \mid 1 \le i \le 3\}$ ein C^∞-Atlas für M ist. Deute die Definitionen der verwendeten Karten geometrisch! Auf welche Kurven in $\mathbb{R}^2$ bilden ψ_1, ψ_2 und ψ_3 die projektive Kurve $\{[x:y:z] \mid yz^2 = x^3\}$ ab?

Aufgabe (6.3) Wir versehen $V := \mathbb{R}^n$ mit dem natürlichen Skalarprodukt und bezeichnen mit X die Menge aller affinen Hyperebenen in V. Für jeden Punkt $p \in V$ sei $U_p := \{H \in X \mid p \notin H\}$, und für $H \in U_p$ sei $\psi_p(H)$ der Lotfußpunkt von p auf H. Zeige, daß dann $\mathfrak{A} := \{(U_p,\psi_p) \mid p \in V\}$ ein C^∞-Atlas für X ist.

Aufgabe (6.4) Gegeben seien eine beliebige Menge X, eine Familie von Teilmengen $U_i \subseteq X$ und zugehörige injektive Abbildungen $\psi_i : U_i \to \mathbb{R}^d$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(1) $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, d.h., die Mengen U_i überdecken X;
(2) für alle $i,j \in I$ ist $\psi_i(U_i \cap U_j)$ offen in $\mathbb{R}^d$;
(3) für alle $i,j \in I$ ist $\psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \to \psi_j(U_i \cap U_j)$ ein C^k-Diffeomorphismus.

Zeige, daß es dann genau eine Topologie auf X derart gibt, daß die Mengen U_i offen und die Abbildungen $\psi_i : U_i \to \psi_i(U_i)$ Homöomorphismen sind. Mit dieser Topologie und dem Atlas $\{(U_i,\psi_i) \mid i \in I\}$ wird dann X zu einer d-dimensionalen C^k-Mannigfaltigkeit.

Bemerkung. Dies bedeutet, daß jeder C^k-Atlas $\mathfrak{A}$ auf einer Menge X diese Menge automatisch zu einem topologischen Raum macht, auf dem $\mathfrak{A}$ dann eine C^k-Struktur induziert. Man nennt die so definierte Topologie die intrinsische Topologie der Mannigfaltigkeit X; sie stimmt nicht zwangsläufig mit einer Topologie überein, die X möglicherweise auf natürliche Weise (etwa als Teilraum eines umgebenden Raums) schon trägt.

Aufgabe (6.5) Es seien M eine eingebettete C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$ und N eine eingebettete C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Zeige: Ist $f : M \to N$ die Einschränkung einer C^k-Abbildung $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, so ist f eine C^k-Abbildung von M nach N, und für jeden Punkt $p \in M$ entsteht $f'(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ aus $F'(p) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ durch Restriktion auf T_pM und Korrestriktion auf $T_{f(p)}N$.

Aufgabe (6.6) Es sei Sym_n der reelle Vektorraum aller symmetrischen reellen $(n \times n)$-Matrizen. Wir definieren $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{Sym}_n$ durch

$$f(A) := A^T A.$$

Berechne $f'(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{Sym}_n$ für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Für welche A ist $f'(A)$ injektiv bzw. surjektiv? Gib für $n = 2$ das Ergebnis dieser Aufgabe in Koordinaten an!

Aufgabe (6.7) Für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und einen gebenen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ betrachten wir die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \|Ax - b\|^2.$$

Berechne $f'(x)$ an einer beliebigen Stelle $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe (6.8) Es seien $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ und $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}^m$ vorgegebene Punkte. Wir definieren $f : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ durch

$$f(A, b) \ := \ \sum_{i=1}^{N} \|Ax_i + b - y_i\|^2 \,.$$

Berechne $f'(A, b)$ an einer beliebigen Stelle $(A, b) \in \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^m$. Welche Argumente (A, b) minimieren die Funktion f? (Was bedeutet diese Fragestellung?)

Aufgabe (6.9) Es seien $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ und $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}^n$ vorgegebene Punkte. Wir definieren $f : \mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$f(g, b) \ := \ \sum_{i=1}^{N} \|gx_i + b - y_i\|^2 \,.$$

Berechne $f'(g, b)$ an einer beliebigen Stelle $(g, b) \in \mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^n$. Welche Argumente (g, b) minimieren die Funktion f? (Was bedeutet diese Fragestellung?)

Aufgabe (6.10) Wir definieren $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^6$ durch

$$g(x, y, z) \ := \ \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \big(x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx\big) \,.$$

Zeige, daß durch $f([x : y : z]) := g(x, y, z)$ eine Einbettung $f : \mathfrak{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^6$ des projektiven Raums $\mathfrak{P}^2(\mathbb{R})$ in den $\mathbb{R}^6$ ist. Warum handelt es sich in Wirklichkeit sogar um eine Einbettung in einen fünfdimensionalen Raum?

Aufgabe (6.11) Es sei $i : M \to N$ eine C^k-Abbildung zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Genau dann ist i eine Immersion, wenn jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung U derart besitzt, daß $i|_U : U \to N$ eine Einbettung ist. (Immersionen sind lokal Einbettungen.)
(b) Ist i eine injektive Immersion und ist M kompakt, so ist i eine Einbettung.
(c) Ist i eine injektive Immersion und ist i proper (d.h., die Urbilder kompakter Mengen sind wieder kompakt), so ist i eine Einbettung.