Matrix-Liegruppen

Aufgabe 1. Die bijektiven affinen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sind genau die Abbildungen der Form $f_{A,b}(x) := Ax+b$ mit $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeige, daß die Menge dieser Abbildungen eine Gruppe (mit der Verkettung als Gruppenoperation) bildet und vermöge

$$f_{A,b} \;\mapsto\; \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit einer Matrix-Liegruppe identifiziert werden kann.

Aufgabe 2. Es sei

$$A \;:=\; \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zeige, daß es keine Matrix $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gibt mit $A = \exp(X)$. Finde aber zwei Matrizen $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A = \exp(X_1)\exp(X_2)$. Zeige ferner, daß es eine *komplexe* Matrix $Y \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ gibt mit $A = \exp(Y)$.

Aufgabe 3. Es sei $\|\cdot\|$ eine submultiplikative Matrixnorm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$. Zeige: Gilt $\|X\| < \ln(2)$, so gilt $\|\exp(X) - \mathbf{1}\| < 1$.

Aufgabe 4. Es sei $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine beliebige Matrix. Berechne $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\log(\mathbf{1} + tX)$.

Aufgabe 5. Berechne den Term vierter Ordnung in der Campbell-Baker-Hausdorff-Formel für

$$\log\bigl(\exp(X)\exp(Y)\bigr).$$

Aufgabe 6. Es sei G eine topologische Gruppe. Beweise die beiden folgenden Aussagen.

(a) Die Zusammenhangskomponente G_0 des Neutralelements ist ein abgeschlossener Normalteiler von G.

(b) Jede offene Untergruppe von G ist auch abgeschlossen.

Was bedeuten diese Aussagen für $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ und $G = \mathrm{O}(n)$?

Aufgabe 7. Es seien G eine zusammenhängende topologische Gruppe und U ein total unzusammenhängender Normalteiler von G. Zeige, daß dann U im Zentrum von G enthalten ist!

Erläuterung: Ein topologischer Raum heißt total unzusammenhängend, wenn seine Zusammenhangskomponenten einpunktig sind. (Beispielsweise ist jeder diskrete Raum total unzusammenhängend, aber auch $\mathbb{Q}$ mit der Spurtopologie von $\mathbb{R}$ ist total unzusammenhängend.) Das Zentrum $Z(G)$ einer Gruppe G ist definiert als

$$Z(G) \;:=\; \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in G\}.$$

Aufgabe 8. Zeige: Ist G eine Matrix-Liegruppe mit der Liealgebra $L(G) = T_{\mathbf{1}}(G)$, so gilt

$$T_g G \;=\; g\cdot L(G) \;=\; L(G)\cdot g.$$

Schließe daraus, daß das Tangentialbündel TG auf zwei Arten mit dem direkten Produkt $G \times L(G)$ identifiziert werden kann!

Aufgabe 9. Es seien $t \mapsto g(t)$ sowie $t \mapsto g_1(t)$ und $t \mapsto g_2(t)$ glatte Kurven in einer Matrix-Liegruppe mit $g(0) = g_1(0) = g_2(0) = \mathbf{1}$ sowie $X = g'(0) = g_1'(0)$ und $Y = g_2'(0)$. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) $(g^{-1})'(0) = -X$

(b) $(g_1 g_2)'(0) = X + Y$

(c) $\partial_s|_{s=0}\,\partial_t|_{t=0}\; g_1(t)g_2(s)g_1(t)^{-1}g_2(s)^{-1} = [X,Y]$

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, daß die Multiplikation mit -1 in $L(G)$ die Linearisierung der Inversion in G ist, die Addition in $L(G)$ die Linearisierung der Multiplikation in G und die Bildung der Lieklammer in $L(G)$ die Linearisierung der Kommutatorbildung in G (jeweils am Neutralelement der Gruppe).

Aufgabe 10. Eine **Lie-Algebra** über einem Körper K ist ein K-Vektorraum zusammen mit einer Abbildung $L\times L \to L$, $(x,y) \mapsto [x,y]$, die die folgenden Eigenschaften hat.

(a) Bilinearität: $[\sum_i \lambda_i x_i, \sum_j \mu_j y_j] = \sum_{i,j} \lambda_i\mu_j [x_i, y_j]$

(b) Schiefsymmetrie: $[y,x] = -[x,y]$

(c) Jacobi-Identität: $\bigl[x,[y,z]\bigr] + \bigl[y,[z,x]\bigr] + \bigl[z,[x,y]\bigr] = 0$

Zeige, daß in den folgenden Fällen jeweils eine Lie-Algebra vorliegt!

(a) $L = K^{n\times n}$, $[X,Y] := XY - YX$

(b) $L = \{X \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid X^T = -X\}$, $[X,Y] := XY - YX$

(c) $L = \mathbb{R}^3$, $[u,v] := u \times v$

Stelle einen Zusammenhang zwischen (b) und (c) unter Benutzung der Tatsache her, daß die schiefsymmetrischen (3×3)-Matrizen gerade die Matrizen der Form

$$L(u) \;:=\; \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

mit $u \in \mathbb{R}^3$ sind.

Aufgabe 11. Es sei L eine Lie-Algebra über einem Körper K. Für ein beliebiges Element $a \in L$ definieren wir die adjungierte Abbildung $\mathrm{ad}(a): L \to L$ durch

$$\mathrm{ad}(a)x \;:=\; [a,x].$$

(a) Zeige, daß $\mathrm{ad}(a)$ eine lineare Abbildung ist und daß für alle $x, y \in L$ die folgende Gleichung gilt:

$$\mathrm{ad}(a)[x,y] \;=\; \bigl[\mathrm{ad}(a)x, y\bigr] + \bigl[x, \mathrm{ad}(a)y\bigr].$$

(b) Zeige: Für alle $a, b \in L$ gilt

$$\operatorname{ad}([a,b]) \;=\; \operatorname{ad}(a)\operatorname{ad}(b) - \operatorname{ad}(b)\operatorname{ad}(a)\,.$$

(c) Gegeben sei eine Teilmenge $X \subseteq L$. Zeige: Jeder durch mehrfaches Bilden von Lieklammern aus Elementen von X erzeugte Ausdruck läßt sich als Linearkombination von Elementen darstellen, die durch mehrfache Lieklammerbildung ausschließlich von links entstehen. Beispielsweise gilt

$$\big[[a,b],[c,d]\big] \;=\; \Big[a,\big[b,[c,d]\big]\Big] - \Big[b,\big[a,[c,d]\big]\Big]\,.$$

Aufgabe 12. Es sei G eine Matrix-Liegruppe mit der Liealgebra $\mathfrak{g} = T_eG$. Zeige, daß für alle $g \in G$ und alle $X \in \mathfrak{g}$ auch gXg^{-1} in $\mathfrak{g}$ liegt. Zeige ferner, daß für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ die folgende Gleichung gilt:

$$\exp(X)\,Y\exp(X)^{-1} \;=\; \exp\big(\operatorname{ad}(X)\big)Y.$$

Hinweis: Zeige, daß die beiden Funktionen $\alpha_1(t) := \exp(tX)\,Y\exp(-tX)$ und $\alpha_2(t) := \exp\big(t\operatorname{ad}(X)\big)Y$ beide die Differentialgleichung $\dot\alpha(t) = X\alpha(t) - \alpha(t)X$ und die Anfangsbedingung $\alpha(0) = Y$ erfüllen.

Aufgabe 13. Es sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Matrix-Liegruppen $G_i \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Zeige, daß dann auch $G := \bigcap_{i\in I} G_i$ eine Matrix-Liegruppe ist. Zeige ferner, daß $T_gG = \bigcap_{i\in I} T_gG_i$ für alle $g \in G$ gilt.

Aufgabe 14. Es sei $D(n) \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ die Menge aller invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen der Größe $n \times n$. Zeige, daß $D(n)$ eine Matrix-Liegruppe ist. Begründe insbesondere, warum das folgende Argument falsch ist!

Für $g_k := \begin{bmatrix} 1/k & 1 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix} \in D(2)$ gilt $g_k \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin D(2)$.

Also ist $D(2)$ nicht abgeschlossen und damit keine Matrix-Liegruppe in $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.

Aufgabe 15. Es seien $f_k : \mathbb{N} \to X$ Funktionen mit Werten in einem Banachraum X.

(a) Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty f_k(n)$ konvergiere gleichmäßig in $n \in \mathbb{N}$. (D.h., ist $F(n) = \sum_{k=1}^\infty f_k(n)$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index K_ε (unabhängig von n) mit $\|\sum_{k=1}^K f_k(n) - F(n)\| < \varepsilon$ für alle $K \geq K_\varepsilon$ und alle $n \in \mathbb{N}$.) Zeige: Existiert $a_k := \lim_{n\to\infty} f_k(n)$, so konvergiert auch $\sum_{k=1}^\infty a_k$, und es gilt $\sum_{k=1}^\infty a_k = \lim_{n\to\infty} F(n)$, also

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^\infty f_k(n)\right) \;=\; \sum_{k=1}^\infty \left(\lim_{n\to\infty} f_k(n)\right).$$

(b) Zeige: Gibt es reelle Zahlen $c_k \in \mathbb{R}$ mit $\|f_k(n)\| \leq c_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^\infty c_k < \infty$, so konvergiert $\sum_{k=1}^\infty f_k(n)$ gleichmäßig in n. (Kurz gesagt: Besitzt eine Funktionenreihe eine gleichmäßige Majorante, so ist sie gleichmäßig konvergent.)

Bemerkung. Die beiden Aussagen dieser Aufgabe wurden im Beweis von Satz (6.5) benutzt.

Aufgabe 16. Es sei

$$G \;=\; \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R},\, a \neq 0\}.$$

(Nach Aufgabe 1 ist G nichts anderes als die Gruppe aller affinen Transformationen von $\mathbb{R}$.) Bestimme die Liealgebra $L(G)$ von G und gib die Exponentialfunktion $\exp : L(G) \to G$ explizit an! Beschreibe ferner explizit, wie gemäß Aufgabe 8 für ein beliebiges Element $g \in G$ der Tangentialraum T_gG durch Links- bzw. Rechtsmultiplikation mit g aus $T_eG = L(G)$ hervorgeht, wenn $e = \mathbf{1}$ das Neutralelement von G ist.