A98: Optimierung auf Mannigfaltigkeiten

Aufgabe (98.1) Bestimme

(a) mit Hilfe der Methode von Lagrange,

(b) durch Zurückführung auf ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen,

an welcher Stelle (x, y) des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ der Ausdruck xy minimal bzw. maximal wird.

Aufgabe (98.2) Bestimme

(a) mit Hilfe der Methode von Lagrange,

(b) durch Zurückführung auf ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen,

an welcher Stelle (x, y) der Ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ der Ausdruck xy^2 minimal bzw. maximal wird.

Aufgabe (98.3) Finde alle Extrema der Funktion $f(x, y, z) := xyz^2$ unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$.

Aufgabe (98.4) An welcher Stelle (x, y) der Ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ wird der Ausdruck xy^2 minimal bzw. maximal?

Aufgabe (98.5) Bestimme

(a) mit der Methode von Lagrange,

(b) durch Zurückführung auf ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen,

welcher Punkt (x, y) der Kurve $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ und welcher Punkt (ξ, η) der Kurve $\xi^2 + 4\eta^2 = 4$ am dichtesten beisammen liegen. **Hinweis zu (b):** es gilt $3x^2 + 2xy + 3y^2 = (x - y)^2 + 2(x + y)^2$.

Aufgabe (98.6) Bestimme

(a) mit der Methode von Lagrange,

(b) durch Zurückführung auf ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen,

an welcher Stelle (x, y, ξ, η) die Funktion

$$f(x, y, \xi, \eta) \;:=\; \frac{1}{2}\big((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\big)$$

unter den Nebenbedingungen $x + y^2 = 0$ und $\xi\eta = 1$ minimal wird. (Wie kann man diese Aufgabe geometrisch deuten?)

Aufgabe (98.7) Welcher Punkt des Rotationsparaboloids $z = x^2 + y^2$ hat den kleinsten Abstand vom Punkt $(1, 3, 2)$?

Aufgabe (98.8) Die Ellipse E sei definiert als der Schnittpunkt des Ellipsoids $(x/2)^2 + (y/\sqrt{5})^2 + (z/5)^2 = 1$ mit der Ebene $z = x+y$. Bestimme die kleine und die große Halbachse von R!

Aufgabe (98.9) Wir betrachten die Parabel P mit der Gleichung $y = x^2 + 1$ und die Gerade G mit der Gleichung $y = x/2$. Welche Punkte auf P und auf G liegen am dichtesten beisammen?

Aufgabe (98.10) Finde die Minima und Maxima der Funktion $f(a, b, c, d, e) := a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4$ unter den folgenden Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 0 &= a + b + c + d + e, \\ 4 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2, \\ 0 &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3. \end{aligned}$$

Hinweis. Es sei $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ ein Punkt, an dem f unter den angegebenen Nebenbedingungen ein lokales Minimum oder Maximum annimmt. Benutze die Methode von Lagrange, um zu zeigen, daß die fünf Zahlen a, b, c, d, e eine gemeinsame Polynomgleichung dritten Grades erfüllen.

Aufgabe (98.11) Eine 2×2-Matrix soll so gebildet werden, daß die erste Spalte von A die Länge 1 und die zweite Spalte von A die Länge 2 hat. Welchen maximalen bzw. minimalen Wert kann die Determinante einer solchen Matrix annehmen?

Aufgabe (98.12) Es seien M und N Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$. (Man denke etwa an zwei Kurven, eine Kurve und eine Fläche oder zwei Flächen im Raum.) Zeige: Wird der minimale Abstand eines Punktes $x \in M$ und eines Punktes $y \in N$ in den Punkten x_0 und y_0 angenommen, so schneidet die Verbindungsgerade $\overline{x_0y_0}$ sowohl M als auch N unter einem rechten Winkel.

Aufgabe (98.13) Es seien $c_1, \ldots, c_n > 0$ positive Zahlen. Bestimme den maximalen Abstand, den zwei Punkte in der Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid c_1x_1^4 + c_2x_2^4 + \cdots + c_nx_n^4 = 1\}$$

voneinander haben können.

Aufgabe (98.14) Eine reelle Zahl $a > 0$ soll so als Summe $a = a_1 + \cdots + a_n$ positiver reeller Zahlen $a_i > 0$ dargestellt werden, daß das Produkt $a_1a_2 \cdots a_n$ möglichst groß wird. Wie ist die Zerlegung zu wählen? (Die Anzahl n der Summanden ist dabei beliebig.)

Aufgabe (98.15) Ein Punkt (x_0, y_0) im ersten Quadranten eines rechtwinkligen Koordinatensystems sei gegeben. Wir betrachten alle rechtwinkligen Dreiecke, deren Katheten von $(0, 0)$ aus in Richtung der Koordinatenachsen verlaufen und deren Hypotenuse durch (x_0, y_0) geht. Welches unter diesen Dreiecken hat minimalen Umfang?

Aufgabe (98.16) (a) Welcher Quader mit vorgegebenem Volumen V_0 hat minimale Oberfläche?

(b) Welcher Quader mit vorgegebener Oberfläche F_0 hat maximales Volumen?

Aufgabe (98.17) Eine quaderförmige Kiste ohne Deckel soll gefertigt werden.

(a) Wie sind die Abmessungen zu wählen, wenn das Volumen V_0 vorgegeben ist und der Materialverbrauch minimiert werden soll?

(b) Wie sind die Abmessungen zu wählen, wenn der Materialaufwand vorgegeben ist und das Volumen maximiert werden soll?

Aufgabe (98.18) Entlang einer geradlinigen Straße der Länge ℓ soll eine gegebene Zahl n von Notrufsäulen derart angebracht werden, daß der durchschnittliche Weg von irgendeinem Punkt der Straße aus zur jeweils nächsten Notrufsäule möglichst kurz wird. Wo sind die Notrufsäulen zu postieren?

Aufgabe (98.19) Bestimme die kleinste Zahl F mit der folgenden Eigenschaft: Sind Q_1 und Q_2 beliebige Quadrate mit der Gesamtfläche 1, so gibt es ein Rechteck mit der Fläche F derart, daß Kopien von Q_1 und Q_2 überlappungsfrei in dieses Rechteck eingepaßt werden können.

Aufgabe (98.20) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Für $p \geq 1$ betrachten wir die Norm $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ auf $\mathbb{K}^n$. Bestimme für $p \neq q$ die kleinste Zahl $C > 0$ mit $\|x\|_p \leq C\|x\|_q$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$.

Aufgabe (98.21) Wir betrachten die Funktionen $f, g : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := 2x + 3y$ und $g(x,y) := \sqrt{x} + \sqrt{y} - 5$. Zeige, daß es einen eindeutig bestimmten Punkt (x_0, y_0) gibt, an dem die Funktion f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ihr Maximum annimmt, daß es aber keinen Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $(\nabla f)(x_0,y_0) = \lambda \cdot (\nabla g)(x_0,y_0)$. Warum ist dies kein Widerspruch zum Satz von Lagrange?

Aufgabe (98.22) Wir betrachten die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := x$ und $g(x,y) := x^3 - y^2$. Zeige, daß es einen eindeutig bestimmten Punkt (x_0,y_0) gibt, an dem die Funktion f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ihr Minimum annimmt, daß es aber keinen Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $(\nabla f)(x_0,y_0) = \lambda \cdot (\nabla g)(x_0,y_0)$. Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Lagrange?

Aufgabe (98.23) Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f, g_1, \ldots, g_m : U \to \mathbb{R}$ Funktionen der Klasse C^1. Die Funktion f nehme im Punkt $p \in U$ ein lokales Minimum oder Maximum unter den Nebenbedingungen $g_i(x) = 0$ für $1 \leq i \leq m$ an. Zeige, daß es einen Vektor $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0,0,\ldots,0)$ gibt mit

$$\lambda_0\,(\nabla f)(p) \;=\; \lambda_1\,(\nabla g_1)(p) + \cdots + \lambda_m\,(\nabla g_m)(p).$$

Aufgabe (98.24) Gegeben seien eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sowie Funktionen $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $1 \leq i \leq m$. An der Stelle p nehme f unter den Nebenbedingungen $g_i = 0$ ein lokales Extremum an, und die Vektoren $(\nabla g_i)(p)$ seien linear unabhängig. Dann existieren zugehörige Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Zeige: Ist $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Funktion mit den Komponentenfunktionen g_i, so ist $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T$ gegeben durch

$$\lambda \;=\; \big(g'(p)^T g'(p)\big)^{-1} g'(p)^T (\nabla f)(p)\,.$$

Aufgabe (98.25) Wir betrachten die Funktionen $f(x,y) := xy$ und $g(x,y) := x + y - 2$ sowie $L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda g(x,y)$. Ferner sei $(x_0,y_0,\lambda_0) := (1,1,-1)$.

(a) Zeige, daß im Punkt (x_0,y_0) die Funktion f ihr eindeutig bestimmtes Maximum unter der Nebenbedingung $g = 0$ annimmt.

(b) Zeige, daß weder (x_0,y_0,λ_0) eine Maximalstelle von L noch (x_0,y_0) eine Maximalstelle der Funktion $(x,y) \mapsto L(x,y,\lambda_0)$ ist.

Aufgabe (98.26) Es seien $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid G(x,y) = 0\}$ mit $G(x,y) := y - x^3 - (28/27)$ und f die Einschränkung der Funktion $F(x,y) := x^2 + y^2$ auf M. Zeige, daß f im Punkt $p := (-1/3, 1)$ ein lokales Maximum annimmt, obwohl die Einschränkung von $F''(p)$ auf $T_pM \times T_pM$ indefinit ist.

Aufgabe (98.27) Wir betrachten eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^n$ und eine C^2-Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wir wollen sowohl notwendige als auch hinreichende Kriterien dafür herleiten, daß die Einschränkung $f = F|_M$ ein Maximum oder Minimum in einem Punkt $p \in M$ annimmt. (Gemeint sind immer lokale Maxima und Minima.) Wir nehmen an, M sei in einer Umgebung von p durch ein reguläres Gleichungssystem $G_1(x) = \cdots = G_m(x) = 0$ mit $m = n - d$ gegeben. Es seien Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ derart gegeben, daß für $L(x) := F(x) + \lambda_1 G_1(x) + \cdots + \lambda_m G_m(x)$ die Bedingung $L'(p) = 0$ gilt. Es sei $(v_1, \ldots, v_d)$ eine Basis von $T_pM = \big(\mathbb{R}(\nabla G_1)(p) + \cdots + \mathbb{R}(\nabla G_m)(p)\big)^\perp$, und es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ die Matrix mit den Spalten $v_1, \ldots, v_d$. Mit der Hesse-Matrix $L''(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ von L im Punkt p bilden wir die Matrix

$$B \;:=\; A^T L''(p) A \in \mathbb{R}^{d\times d}\,.$$

Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Hat f ein Minimum in p, so ist B positiv semidefinit.

(b) Ist B positiv definit, so hat f ein Minimum in p.

(c) Hat f ein Maximum in p, so ist B negativ semidefinit.

(d) Ist B negativ definit, so hat f ein Maximum in p.

(e) Ist B indefinit, so hat f kein Extremum in p.

Bemerkung: In den folgenden Aufgaben wird dieses allgemeine Ergebnis für kleine Werte von n und m konkretisiert.

Aufgabe (98.28) Funktion in zwei Variablen mit einer Nebenbedingung. Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $f \in C^2(\Omega)$ und $g \in C^1(\Omega)$ reellwertige Funktionen. An der Stelle $p \in \Omega$ gebe es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $(\nabla f)(p) = \lambda\,(\nabla g)(p)$ (d.h., die notwendige Bedingung dafür, daß f ein Extremum unter der Nebenbedingung $g = 0$ annimmt, sei erfüllt). Mit $L := f + \lambda g$ definieren wir $D : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$D \;:=\; \begin{bmatrix} -g_y & g_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -g_y \\ g_x \end{bmatrix}.$$

Beweise die beiden folgenden Aussagen!

(a) Gilt $D(p) > 0$, so nimmt f ein lokales Minimum unter der Nebenbedingung $g = 0$ an.

(b) Gilt $D(p) < 0$, so nimmt f ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung $g = 0$ an.

Aufgabe (98.29) Funktion in drei Variablen mit einer Nebenbedingung. Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $f \in C^2(\Omega)$ und $g \in C^1(\Omega)$ reellwertige Funktionen. An der Stelle $p \in \Omega$ gebe es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $(\nabla f)(p) = \lambda\,(\nabla g)(p)$ (d.h., die notwendige Bedingung dafür, daß f ein Extremum unter der Nebenbedingung $g = 0$ annimmt, sei erfüllt). Mit $L := f + \lambda g$ definieren wir $A : \Omega \to \mathbb{R}^{3\times 2}$ durch

$$A \;:=\; \begin{bmatrix} -g_y & -g_x g_z \\ g_x & -g_y g_z \\ 0 & g_x^2 + g_y^2 \end{bmatrix}, \text{ falls } (g_x, g_y) \neq (0,0),$$

$$A \;:=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ falls } (g_x, g_y) = (0,0)$$

und dann $M : \Omega \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ durch

$$M := A^T \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{bmatrix} A.$$

Beweise die beiden folgenden Aussagen!

(a) Ist $M(p)$ positiv definit, so nimmt f ein lokales Minimum unter der Nebenbedingung $g = 0$ an.

(b) Ist $M(p)$ negativ definit, so nimmt f ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung $g = 0$ an.

Aufgabe (98.30) Funktion in drei Variablen mit zwei Nebenbedingungen. Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $f \in C^2(\Omega)$ und $g_1, g_2 \in C^1(\Omega)$ reellwertige Funktionen. An der Stelle $p \in \Omega$ gebe es Zahlen $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ mit $(\nabla f)(p) = \lambda_1\,(\nabla g_1)(p) + \lambda_2\,(\nabla g_2)(p)$ (d.h., die notwendige Bedingung dafür, daß f ein Extremum unter den Nebenbedingungen $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ annimmt, sei erfüllt). Mit $L := f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$ definieren wir $D : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$D := \big((\nabla g_1)\times(\nabla g_2)\big)^T \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{bmatrix} \big((\nabla g_1)\times(\nabla g_2)\big).$$

Beweise die beiden folgenden Aussagen!

(a) Gilt $D(p) > 0$, so nimmt f ein lokales Minimum unter den Nebenbedingungen $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ an.

(b) Gilt $D(p) < 0$, so nimmt f ein lokales Maximum unter den Nebenbedingungen $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ an.

Aufgabe (98.31) Bestimme alle Extrema der Funktion $f(x,y,z) := x(y+z)$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und gib jeweils an, ob ein Minimum oder ein Maximum vorliegt.

Aufgabe (98.32) Wir betrachten C^1-Funktionen $f, g_1, \ldots, g_m$ und fassen die Funktionen g_i zu einer vektorwertigen Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zusammen. Wir nehmen an, auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ habe $g'(x)$ den Rang $n-m$, und für jeden Wert $c \in \mathbb{R}^m$ eines gewissen Parameterbereichs nehme f in U ein eindeutiges Minimum bzw. Maximum unter der Nebenbedingung $g(x) = c$ an. Dieses Optimum werde an der Stelle $x_\star(c)$ angenommen, und die Abbildung $c \mapsto x_\star(c)$ sei von der Klasse C^1. Ferner sei $\lambda(c) \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor von Lagrange-Multiplikatoren. Zeige, daß dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c} f\big(x_\star(c)\big) \;=\; \lambda(c)^T$$

gilt, und interpretiere diese Gleichung.