A97: Mannigfaltigkeiten

Aufgabe (97.1) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ der Graph der Betragsfunktion $x \mapsto |x|$, also

$$M := \{(x,|x|) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Finde einen Homöomorphismus $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der M auf $\mathbb{R} \times \{0\}$ abbildet.
(b) Zeige, daß in (a) der Homöomorphismus sogar so gewählt werden kann, daß er von der Klasse C^∞ ist.
(c) Zeige, daß es keinen Diffeomorphismus $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, der M auf $\mathbb{R} \times \{0\}$ abbildet.
(d) Zeige genauer, daß es keinen Diffeomorphismus $F : U \to V$ zwischen offenen Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(0,0) \in U$ geben kann, der $M \cap U$ auf $V \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ abbildet.

Bemerkung. Teil (a) zeigt, daß man M stetig in einen eindimensionalen affinen Raum deformieren kann (und zwar sogar global). Teil (c) zeigt, daß im Gegensatz dazu M nicht glatt in einen eindimensionalen affinen Raum deformiert werden kann (und zwar nicht einmal lokal).

Aufgabe (97.2) Wir definieren $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(t) := (t^3, t^3) \quad \text{und} \quad g(x,y) := x^3 - y^3.$$

(a) Beweise die Gleichheit

$$\{\varphi(t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\} =: M.$$

(b) Zeige, daß M eine Mannigfaltigkeit ist, obwohl die Parametrisierung φ eine Singularität an der Stelle $t = 0$ hat und obwohl die definierende Funktion g eine Singularität an der Stelle $(x,y) = (0,0)$ hat.

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, daß man unterscheiden muß zwischen Singularitäten ungünstig gewählter Parametrisierungen bzw. definierender Funktionen (die man durch Wahl anderer Parametrisierungen bzw. definierender Funktionen vermeiden kann) und tatsächlichen geometrischen "Defekten" der betrachteten Menge M (etwa Spitzen, Ecken oder isolierte Punkte), aufgrund derer M keine Mannigfaltigkeit ist.

(97.3) In dieser Aufgabe betrachten wir Parametrisierungen und Gleichungsdarstellungen, die möglicherweise Singularitäten haben.

(a) Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung der Klasse C^k. Zeige, daß

$$M := \{\varphi(\xi) \mid \xi \in \Omega, \operatorname{rk} \varphi'(\xi) = d\}$$

(leer oder) eine C^k-Mannigfaltigkeit ist.

(b) Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ eine Abbildung der Klasse C^k. Zeige, daß

$$M := \{x \in U \mid g(x) = 0, \operatorname{rk} g'(x) = n-d\}$$

(leer oder) eine C^k-Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung. Diese Aufgabe zeigt, daß aus einer Menge, die durch eine C^k-Parametrisierung oder als Nullstellenmenge einer C^k-Funktion gegeben ist, immer eine Mannigfaltigkeit entsteht, wenn man die singulären Punkte einfach aus dieser Menge entfernt.

Aufgabe (97.4) Gib in den Beispielen (97.1) bis (97.6) im Buch genau an, warum keine Mannigfaltigkeiten im Sinne von (97.9) vorliegen.

Aufgabe (97.5) Ebene Kurven. Entscheide in den folgenden Fällen, ob die angegebene Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. (Welche Punkte müssen gegebenenfalls entfernt werden, um eine solche Untermannigfaltigkeit zu erhalten?) Finde für die in Gleichungsform angegebenen Mannigfaltigkeiten eine Parameterdarstellung und für die in Parameterform angegebenen Mannigfaltigkeiten eine Gleichungsdarstellung!

(a) $M = \{(t^3, t^6) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(b) $M = \{(2t^3 + t^2,\, t^3 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(c) $M = \{(t, |t|) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(d) $M = \{(t^3 + t^2, t^3 - t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(e) $M = \{\big((1+\cos t)\cos t,\, (1+\cos t)\sin t\big) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(f) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2y + y^3 - x^2 - y^2 = 0\}$
(g) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 + x^2\}$
(h) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^4 + x^2y^2 + y^4 = 0\}$
(i) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2-1)^2 + 2y^2(x^2+1) + y^4 = 1\}$
(j) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2 = 0\}$
(k) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 = \sqrt{2}\}$

Aufgabe (97.6) Flächen im Raum. Entscheide in den folgenden Fällen, ob die angegebene Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Finde für die in Gleichungsform angegebenen Mannigfaltigkeiten eine Parameterdarstellung und für die in Parameterform angegebenen Mannigfaltigkeiten eine Gleichungsdarstellung!

(a) $M = \{(u+v, uv, u^2+v^2) \mid u,v \in \mathbb{R}\}$
(b) $M = \{(u^2-v^2, 2uv, u^2+v^2) \mid u,v \in \mathbb{R}\}$
(c) $M = \{(u+|v|, |u|+v, uv) \mid u,v \in \mathbb{R}\}$
(d) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$
(e) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = 0\}$
(f) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3+y^3+z^3 = 3xyz\}$
(g) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+x^2y^2 = xyz\}$
(h) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + e^{xy} + zy = 0\}$

Aufgabe (97.7) Räumliche Kurven. Entscheide in den folgenden Fällen, ob die angegebene Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Finde für die in Gleichungsform angegebenen Mannigfaltigkeiten eine Parameterdarstellung und für die in Parameterform angegebenen Mannigfaltigkeiten eine Gleichungsdarstellung!

(a) $M = \{(\cos t, \sin t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(b) $M = \{(t, t^2, \sqrt{t^2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(c) $M = \{(t, t^2, \sqrt{t^2+1}) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(d) $M = \{(t^2, \cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(e) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2, z = x^3\}$

(f) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z^2, ax+by+cz=d\}$
(g) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3+y^3+z^3 = x^2+y^2+z^2 = 0\}$
(h) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \sin(yz), y = \cos(xz)\}$
In Teil (f) seien dabei $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben.

Aufgabe (97.8) Es sei $M := \mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Zeige, daß in den folgenden Fällen jeweils $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine reguläre Parametrisierung einer offenen Teilmenge von M ist, und gib die Menge $\varphi(U)$ sowie die Umkehrabbildung $\psi : \varphi(U) \to U$ von φ explizit an!

(a) Senkrechte Projektion: $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$,

$$\varphi(x,y) \;:=\; \Big(x,\ y,\ \sqrt{1-x^2-y^2}\Big)$$

(b) Kugelkoordinaten: $U = (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$,

$$\varphi(u,v) \;:=\; \Big(\cos(v)\cos(u),\ \cos(v)\sin(u),\ \sin(v)\Big)$$

(c) Stereographische Projektion: $U = \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x,y) \;:=\; \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\ \frac{2y}{x^2+y^2+1},\ \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$$

Kann es eine reguläre Parametrisierung $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $\varphi(U) = \mathbb{S}^2$ geben? (Kann man also $\mathbb{S}^2$ mit einer einzigen Karte überdecken?)

Aufgabe (97.9) Ein **Torus** ist eine Fläche, die entsteht, wenn ein Kreis C vom Radius r sich so bewegt, daß sein Mittelpunkt einen Kreis K vom Radius $R > r$ durchläuft, und zwar so, daß sich der Mittelpunkt von K stets in Ebene des Kreises C befindet. Gib eine Parameterdarstellung eines solchen Torus an! Genauer: Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^3$ der Torus, dessen Zentralkreis in der xy-Ebene liegt, den Mittelpunkt $(0,0,0)$ und den Radius R hat und dessen Querschnittskreise den Radius $r < R$ haben.

(a) Gib eine Parametrisierung von T an!
(b) Stelle T als Nullstellenmenge einer Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dar!
(c) Finde eine C^∞-Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, die $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ bijektiv auf T abbildet!

Aufgabe (97.10) Der **Horntorus** zu Radius $r > 0$ ist die Menge aller Punkte der Form

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \;=\; r \begin{bmatrix} (1+\cos v)\cos u \\ (1+\cos v)\sin u \\ \sin v \end{bmatrix}$$

mit $u, v \in \mathbb{R}$. Stelle diesen Horntorus als Lösungsmenge einer Gleichung $g(x,y,z) = 0$ dar!

Aufgabe (97.11) Ein Stab der Länge ℓ bewege sich im dreidimensionalen Raum, und zwar so, daß sein Mittelpunkt mit konstanter Geschwindigkeit einen Kreis mit Radius $r > \ell$ durchläuft, während der Stab sich während des Umlaufs genau einmal um seinen Mittelpunkt dreht. Gib eine Parameterdarstellung der von dem Stab überstrichenen Fläche an! (Diese Fläche wird als **Möbiusband** bezeichnet.)

Aufgabe (97.12) Es seien $0 < r < R$ reelle Zahlen. Wir definieren $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ durch

$$\varphi(u,v) \;:=\; \begin{bmatrix} \big(R + r\cos(v)\big)\cos(u) \\ \big(R + r\cos(v)\big)\sin(u) \\ r\sin(v)\cos(u/2) \\ r\sin(v)\sin(u/2) \end{bmatrix}$$

und $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$g(a,b,c,d) \;:=\; \begin{bmatrix} (\sqrt{a^2+b^2} - R)^2 + c^2 + d^2 - r^2 \\ 2acd + b(d^2 - c^2) \end{bmatrix}.$$

Zeige, daß die beiden Mengen

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{\varphi(u,v) \mid (u,v) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{und} \\ M_2 &:= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid g(a,b,c,d) = 0\} \end{aligned}$$

übereinstimmen. Ist M_1 bzw. M_2 eine Mannigfaltigkeit?

Aufgabe (97.13) Wir definieren $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &:= x^4 - y^3 \\ g_2(x,y,z) &:= y^5 - z^4 \\ g_3(x,y,z) &:= z^3 - x^5 \end{aligned}$$

sowie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\varphi(t) \;:=\; (t^3, t^4, t^5)$$

und betrachten die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{\varphi(t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \\ M_2 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_i(x,y,z) = 0 \text{ für } i = 1,2,3\}, \\ M_3 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_i(x,y,z) = 0 \text{ für } i = 2,3\}, \\ M_4 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_i(x,y,z) = 0 \text{ für } i = 1,3\}, \\ M_5 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_i(x,y,z) = 0 \text{ für } i = 1,2\}. \end{aligned}$$

Welche Enthaltenseinsbeziehungen bestehen zwischen diesen Mengen? Handelt es sich um eingebettete Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^3$? Falls nein, welche (möglichst wenigen) Punkte muß man entfernen, um jeweils eine Mannigfaltigkeit zu erhalten?

Aufgabe (97.14) Für $n \geq 1$ sei

$$\mathbb{S}^n \;:=\; \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}.$$

Wir definieren eine Abbildung $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$ durch

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos\lambda \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdots \cos\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2} \\
x_2 &= \sin\lambda \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdots \cos\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2} \\
x_3 &= \sin\theta_1 \cos\theta_2 \cdots \cos\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2} \\
x_4 &= \sin\theta_2 \cdots \cos\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2} \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= \sin\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2} \\
x_n &= \sin\theta_{n-2}
\end{aligned}$$

(a) Gib die Abbildung x für $1 \leq n \leq 4$ explizit an!
(b) Gib einen maximalen offenen Parameterbereich in $\mathbb{R}^n$ an, auf dem x injektiv ist. Welcher Teil von $\mathbb{S}^n$ wird durch x parametrisiert?
(c) Als n-dimensionale Polarkoordinaten bezeichnet man die Funktion

$$\Phi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) := r\, x_{n-1}(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}).$$

Berechne für diese Transformation die Funktionaldeterminante $\partial\Phi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})/\partial(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$.
(d) **Stereographische Projektion:** Für $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ sei $\varphi(\xi)$ der Schnittpunkt von $\mathbb{S}^{n-1}$ mit der Verbindungsgeraden zwischen dem Punkt $(\xi, 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ und dem Nordpol $(0, 1) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. (Fertige eine Skizze an und leite eine explizite Formel für φ her!)

Aufgabe (97.15) Es seien $k \leq n$ natürliche Zahlen.
(a) Zeige, daß die Menge

$$\Sigma_{n,k} := \{A \in \mathbb{R}^{n\times k} \mid \mathrm{rk}\,(A) = k\}$$

eine offene Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times k}$ ist.
(b) Zeige, daß

$$S_{n,k} := \{A \in \mathbb{R}^{n\times k} \mid A^T A = \mathbf{1}\}$$

eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times k}$ ist. Welche Dimension hat $S_{n,k}$?
(c) Die Elemente von $S_{n,k}$ werden als k-Beine im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Erläutere diese Bezeichnung!

Nach dem schweizerischen Mathematiker Eduard Ludwig Stiefel (1909-1978) bezeichnet man die Mannigfaltigkeiten $S_{n,k}$ als **Stiefel-Mannigfaltigkeiten** (und die Mannigfaltigkeiten $\Sigma_{n,k}$ zuweilen als **nichtkompakte Stiefel-Mannigfaltigkeiten**).

Aufgabe (97.16) Die **orthogonale Gruppe** in Dimension n ist definiert als

$$\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = \mathbf{1}\}.$$

(a) Zeige, daß $\mathrm{O}(n)$ tatsächlich eine Gruppe im Sinn der Algebra ist.
(b) Zeige, daß $\mathrm{O}(n)$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist. Welche Dimension hat $\mathrm{O}(n)$?
(c) Zeige, daß die **spezielle orthogonale Gruppe**

$$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{O}(n)$ ist, und erläutere den Zusammenhang zwischen $\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{SO}(n)$!

Aufgabe (97.17) Es seien $M_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ eine d_1-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n_1}$ und $M_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ eine d_2-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n_2}$. Zeige, daß dann $M_1 \times M_2$ eine $(d_1 + d_2)$-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ ist.

Problem (97.18) Es sei $M = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid g_1(x) = g_2(x) = 0\}$ mit

$$\begin{aligned}
g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= x_1x_4 - x_2x_3 - 1, \\
g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= x_1x_3 + x_2x_4.
\end{aligned}$$

(a) Zeige, daß M eine Mannigfaltigkeit ist.
(b) Zeige, daß M sogar global als Graph einer Funktion darstellbar ist.
(c) Bestimme den Tangentialraum T_pM und den Normalraum N_pM für den Punkt $p = (1, 0, 0, 1) \in M$.