A96: Umkehrsatz und implizite Funktionen

Aufgabe (96.1) Zeige, daß die durch

$$f(x,y) \;:=\; \begin{bmatrix} xe^y + y \\ xe^y - y \end{bmatrix}$$

definierte Abbildung $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe (96.2) Zeige, daß die durch

$$f(x,y,z) \;:=\; \begin{bmatrix} x/(2+y^2) + ye^z \\ x/(2+y^2) - ye^z + z \\ 2ye^z + z \end{bmatrix}$$

definierte Abbildung $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe (96.3) Definiere $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y) \;:=\; \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix}.$$

Zeige, daß $f'(x,y)$ an jeder Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ invertierbar ist, daß aber f trotzdem kein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe (96.4) Wir definieren $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(r,\varphi) \;:=\; \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Gilt dann $(x,y) = f(r,\varphi)$, so ist $r = \sqrt{x^2+y^2}$ durch x und y eindeutig bestimmt, der Winkel φ dagegen für $(x,y)=(0,0)$ gar nicht und für $(x,y)\neq(0,0)$ nur bis auf ein Vielfaches von 2π. Gib für jede der folgenden Funktionen maximale offene Mengen $U,V \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ derart an, daß durch

$$g(x,y) \;:=\; \begin{bmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi(x,y) \end{bmatrix}$$

eine lokale Umkehrfunktion $g:U\to V$ zu f definiert wird.
(a) $\varphi(x,y) := \arctan(y/x)$
(b) $\varphi(x,y) := \arccos(x/\sqrt{x^2+y^2})$
(c) $\varphi(x,y) := \arcsin(y/\sqrt{x^2+y^2})$
(d) $\varphi(x,y) := 2\arctan\big(y/(x+\sqrt{x^2+y^2})\big)$

Aufgabe (96.5) Wir definieren $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y) \;:=\; \begin{bmatrix} \exp(x) + \exp(y) \\ \exp(x) + \exp(-y) \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Bildmenge $\Omega := f(\mathbb{R}^2)$! Wo ist f ein lokaler Diffeomorphismus? Ist f als Abbildung $f:\mathbb{R}^2 \to \Omega$ sogar ein globaler Diffeomorphismus?

Aufgabe (96.6) Wir betrachten die Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) \;:=\; \begin{bmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimme alle Punkte (x_0,y_0), an denen f lokal ein Diffeomorphismus ist.
(b) Bestimme die Bildmenge $f(\mathbb{R}^2)$ der Funktion f.
(c) Bestimme für jeden regulären Wert (u_0,v_0) von f die Menge aller möglichen lokalen Umkehrabbildungen von f, die in einer Umgebung von (u_0,v_0) definiert sind.

Aufgabe (96.7) Wir betrachten die Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) \;:=\; \begin{bmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimme alle Punkte (x_0,y_0), an denen f lokal ein Diffeomorphismus ist.
(b) Bestimme die Bildmenge $f(\mathbb{R}^2)$ der Funktion f.
(c) Bestimme für jeden regulären Wert (u_0,v_0) von f die Menge aller möglichen lokalen Umkehrabbildungen von f, die in einer Umgebung von (u_0,v_0) definiert sind.

Aufgabe (96.8) In einer Ebene E betrachten wir zwei Kreise K_1 und K_2 mit den Radien r_1 und r_2; der Abstand zwischen den Mittelpunkten dieser Kreise sei ein gegebener Wert $a > r_1 + r_2$. Bestimme die Menge aller Punkte in E, die als Mittelpunkt einer Strecke P_1P_2 mit $P_1 \in K_1$ und $P_2 \in K_2$ auftreten können.

Aufgabe (96.9) Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 &= 0, \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 &= 0 \end{aligned}$$

hat die Lösung $(x_0,y_0,u_0,v_0) = (2,-1,2,1)$. Nach welchen zweien der vier Variablen (als Funktion der beiden anderen Variablen) läßt sich dieses System in einer Umgebung der angegebenen Lösung auflösen?

Aufgabe (96.10) Zeige, daß sich in einer Umgebung des Punktes $(0,0,0)$ die Gleichung

$$x + y^2 + z \;=\; \sin(xz)$$

nach z als Funktion von x und y auflösen läßt, daß es also eine auf einer Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$ definierte Funktion $Z: U \to \mathbb{R}$ mit $Z(0,0)=0$ derart gibt, daß $\big(x,y,Z(x,y)\big)$ die angegebene Gleichung identisch erfüllt. Bestimme zusätzlich alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktion Z.

Aufgabe (96.11) Zeige, daß sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + uy + e^v &= 0 \\ 2x + u^2 - uv &= 5 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2, 5, -1, 0)$ nach (u, v) als Funktionen von (x, y) auflösen läßt.

Aufgabe (96.12) Zeige, daß es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(1, -1)$ und eine C^∞-Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $f(1, -1) = 0$ gibt, die die Identität

$$x \cdot f(x, y)^2 + e^{2f(x,y)} + y \;=\; 0 \quad \big((x, y) \in U\big)$$

erfüllt. Berechne ferner die Werte der partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} und f_{yy} an der Stelle $(1, -1)$.

Aufgabe (96.13) Zeige, daß sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} xu + yu^2 v &= 2 \\ xu^3 + y^2 v^4 &= 2 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 1, 1)$ nach (u, v) als Funktionen von (x, y) auflösen läßt.

Aufgabe (96.14) Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeige, daß es möglich ist, das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^n - y &= a \\ y^n - z &= b \\ z^n - x &= 0 \end{aligned}$$

in einer Umgebung der Lösung $(x_0, y_0, z_0, a_0, b_0) = (0, 0, 0, 0, 0)$ nach (x, y, z) aufzulösen.

Aufgabe (96.15) In dieser Aufgabe wollen wir das in Beispiel (96.22) im Buch diskutierte Kartesische Blatt etwas genauer untersuchen, also die Nullstellenmenge der Funktion

$$f(x, y) \;=\; y^3 + x^3 - 3xy.$$

(a) Zeige mit Hilfe der in (44.10) erhaltenen Lösungsformeln für kubische Gleichungen, daß die Gleichung $f(x, y) = 0$ für $0 < x < \sqrt[3]{4}$ drei verschiedene Lösungen y bzw. für $0 < y < \sqrt[3]{4}$ drei verschiedene Lösungen x besitzt.

(b) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor der in Beispiel (96.22) im Buch angegebenen Parametrisierung $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ des kartesischen Blattes.

(c) Zeige, daß die Singularität dieser Parametrisierung bei $t = -1$ verschwindet, wenn wir stereographische Projektion benutzen.

(d) Zeige, daß es eine in einer Umgebung von 0 definierte analytische Funktion $y = y(x)$ gibt, die die Gleichung des Kartesischen Blattes identisch erfüllt, für die also $f\big(x, y(x)\big) \equiv 0$ gilt. **Hinweis.** Da eine solche Funktion notwendigerweise $y(0) = y'(0) = 0$ erfüllt (warum?), ist es sinnvoll, den Ansatz $y(x) = x^2\eta(x)$ zu machen, der auf $x^3\eta^3 + 1 - 3\eta = 0$ führt. Wende den Satz (76.12) im Buch über implizit gegebene analytische Funktionen an, um zu zeigen, daß diese Gleichung eine analytische Lösung $\eta = \eta(x)$ besitzt, und berechne den Anfang der Taylorentwicklung von η.

Aufgabe (96.16) Es sei $M = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid g_1(x) = g_2(x) = 0\}$ mit

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= x_1x_4 - x_2x_3 - 1, \\ g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= x_1x_3 + x_2x_4. \end{aligned}$$

Zeige, daß M als Graph einer Funktion darstellbar ist.

Aufgabe (96.17) Es sei $M = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid g_1(x) = g_2(x) = 0\}$ mit

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= x_1x_4 - x_2x_3 - 1, \\ g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2. \end{aligned}$$

An welchen Punkten $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in M$ können die beiden Gleichungen $g_1(x) = 0$ und $g_2(x) = 0$ nach zwei der vier Variablen x_i als Funktionen der beiden anderen Variablen aufgelöst werden? Gib die möglichen Auflösungen der beiden Gleichungen nach x_1 und x_4 als Funktionen von x_2 und x_3 explizit an!

Aufgabe (96.18) Es sei ξ eine einfache Nullstelle des Polynoms $a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$. Zeige, daß es dann eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ von $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ und eine C^∞-Funktion $X : U \to \mathbb{R}$ derart gibt, daß für alle $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in U$ der Wert $X(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine einfache Nullstelle des Polynoms $\alpha_0 + \alpha_1X + \cdots + \alpha_nX^n$ ist (glatte Abhängigkeit der Nullstellen eines Polynoms von dessen Koeffizienten).

Hinweis: Benutze den Satz über implizite Funktionen, um die Gleichung $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$ nach x aufzulösen.

Aufgabe (96.19) Es seien V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\mathrm{End}(V)$ der Vektorraum aller Endomorphismen von V. Wir definieren $f : V \times \mathbb{R} \times \mathrm{End}(V) \to V \times \mathbb{R}$ durch

$$f(x, \lambda, A) \;:=\; \begin{bmatrix} Ax - \lambda x \\ \|x\|^2 - 1 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} Ax - \lambda x \\ \langle x, x \rangle - 1 \end{bmatrix}.$$

Es sei (x_0, λ_0, A_0) eine Lösung der Gleichung $f(x, \lambda, A) = 0$; d.h., es sei x_0 ein normierter Eigenvektor von A_0 zum Eigenwert λ_0. Wir setzen ferner voraus, daß die algebraische Vielfachheit von λ_0 als Eigenwert von A_0 gleich 1 ist, daß also ein einfacher Eigenwert vorliegt. Zeige, daß sich dann in einer Umgebung von (x_0, λ_0, A_0) die Gleichung $f(x, \lambda, A) = 0$ glatt nach x und λ als Funktionen von A auflösen läßt, daß es also eine Umgebung $U \subseteq \mathrm{End}(V)$ von A_0 und C^∞-Funktionen $\Phi : U \to V$ und $\psi : U \to \mathbb{R}$ gibt mit $f\big(\Phi(A), \psi(A), A\big) = 0$. (Die Aufgabe zeigt also die glatte Abhängigkeit von Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix von den Matrixkoeffizienten.)

Aufgabe (96.20) Zeige, daß die Gleichung $x^3 - y^3 = 0$ sogar global sowohl nach x als Funktion von y als auch nach y als Funktion von x aufgelöst werden kann, obwohl die Vorausetzungen des Satzes über implizite Funktionen im Punkt $(0,0)$ nicht erfüllt sind.

Aufgabe (96.21) Wir betrachten eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und schreiben einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ in der Form $x = (x', x'')$ mit $x' \in \mathbb{R}^{n-m}$ und $x'' \in \mathbb{R}^m$. In einer Umgebung des Punktes $p \in \mathbb{R}^n$ sei die Gleichung $g(x) = 0$ nach x'' als Funktion von x' auflösbar. Zeige, daß dann die folgende Bedingung gilt:

$$(\star) \qquad \operatorname{rank} \underbrace{\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]}_{m\times n} \;=\; \operatorname{rank} \underbrace{\left[\frac{\partial g}{\partial x''}\right]}_{m\times m}.$$

Bemerkung. Bedingung $(\star)$ ist eine *notwendige* Bedingung für die lokale Auflösbarkeit der Gleichung $g(x) = 0$. Der Satz über implizite Funktionen liefert eine *hinreichende* Bedingung, nämlich

$$(\star\star) \qquad \operatorname{rank} \underbrace{\left[\frac{\partial g}{\partial x''}\right]}_{m\times m} \;=\; m.$$

Es ist klar, daß aus $(\star\star)$ stets $(\star)$ folgt, denn wenn eine $(m\times n)$-Matrix mit $n \geq m$ eine $(m\times m)$-Untermatrix vom Rang m hat, so hat sie selbst schon den Rang m.