

## Vektorfelder und ihre Flüsse

**Lösung (7.1)** In (a) und (b) darf  $M$  eine beliebige Mannigfaltigkeit sein.

(a) Für alle  $p \in M$  gilt  $L_X(fg)(p) = (fg)'(p)X(p) = g(p)f'(p)X(p) + f(p)g'(p)X(p) = g(p) \cdot (L_X f)(p) + f(p) \cdot (L_X g)(p)$ . Da  $p \in M$  beliebig war, bedeutet dies

$$L_X(fg) = f \cdot (L_X g) + (L_X f) \cdot g.$$

(b) Hier ist zu zeigen, daß es für zwei verschiedene Tangentenrichtungen  $X_1(p)$  und  $X_2(p)$  mindestens eine Funktion  $f$  gibt, deren Richtungsableitungen in den beiden Richtungen voneinander verschieden sind. Da es sich hierbei um eine rein lokale Aussage handelt, dürfen wir  $M = \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  annehmen; die Aussage ist dann klar.

(c) Zunächst gilt  $D(1) = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot D(1) + D(1) \cdot 1 = 2 \cdot D(1)$  und damit  $D(1) = 0$ ; hieraus folgt dann  $D(c) = D(c \cdot 1) = c \cdot D(1) = c \cdot 0 = 0$ .

(d) Wir schreiben  $\varphi(t) := f((1-t)p + tq)$ ; dann gilt

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) &= \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \dot{\varphi}(t) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}((1-t)p + tq) \cdot (q_i - p_i) dt \\ &= \sum_{i=1}^d (x_i(q) - x_i(p)) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}((1-t)p + tq) dt \\ &= \sum_{i=1}^d (x_i(q) - x_i(p)) g_i(q). \end{aligned}$$

Damit ist die Gleichung  $f = f(p) + \sum_{i=1}^d (x_i - x_i(p)) g_i$  bewiesen. Anwendung der Derivation  $D$  auf beiden Seiten dieser Gleichung liefert unter Benutzung von Teil (c) dann  $Df = \sum_{i=1}^n ((Dx_i)g_i + (x_i - x_i(p))(Dg_i))$ , also

$$(Df)(q) = \sum_{i=1}^n \left( (Dx_i)(q)g_i(q) + (x_i(q) - x_i(p))(Dg_i)(q) \right)$$

für alle  $q \in \Omega$ . Lassen wir in dieser Gleichung  $q$  gegen  $p$  laufen, so folgt

$$(Df)(p) = \sum_{i=1}^n (Dx_i)(p)g_i(p) = \sum_{i=1}^n (Dx_i)(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Da der Punkt  $p$  und die Funktion  $f$  beliebig gewählt waren, bedeutet dies  $D = \sum_{i=1}^d (Dx_i)(\partial/\partial x_i)$ , also  $D = L_X$  mit  $X(p) = ((Dx_1)(p), \dots, (Dx_d)(p))$ .

**Bemerkung.** Die Aussagen (c) und (d) lassen sich mit Hilfe einer Partition der Eins auf beliebige Mannigfaltigkeiten übertragen. (Dies ist dann ein Beispiel, bei dem deutlich wird, warum die Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie in die Definition einer Mannigfaltigkeit mit aufgenommen wurde.)

**Lösung (7.2)** Wegen  $s(0) = 0$  gilt auch  $0 = s^{-1}(0) = t(0)$  und damit  $\Phi_0 = \varphi_{t(0)} = \varphi_0 = \text{id}_M$ . Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Phi_s(p) &= \frac{d}{ds} \varphi_{t(s)}(p) = \frac{d}{dt} \varphi_{t(s)}(p) \cdot t'(s) \\ &= X(\varphi_{t(s)}(p)) \cdot \frac{1}{\dot{s}(t)} = f(\varphi_{t(s)}(p)) X(\varphi_{t(s)}(p)) \\ &= (fX)(\Phi_s(p)); \end{aligned}$$

damit erfüllt  $\Phi_s$  die definierenden Eigenschaften des lokalen Flusses des Vektorfeldes  $fX$ . Was diese Aufgabe letztlich aussagt, ist die intuitiv einleuchtende Tatsache, daß die Trajektorien von  $fX$  die gleichen Punktmengen durchlaufen wie die Trajektorien von  $X$ , nur mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten, also gewissermaßen mit einer anderen Zeitskala (wobei dann die Transformation  $s \mapsto t(s)$  als Zeittransformation aufzufassen ist).

**Lösung (7.3)** Die Aussagen sind von rein lokaler Natur; wir dürfen also o.B.d.A. annehmen, daß  $M = \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$  ist.

(a) Es gibt eine Umgebung  $U$  von  $p$  und ein  $\hat{T} > 0$  derart, daß  $\varphi_t(x)$  für  $x \in U$  und  $|t| \leq \hat{T}$  definiert ist. Nachdem wir nötigenfalls  $U$  verkleinern, dürfen wir wegen (1) und (2) die Existenz zweier Konstanten  $C, \varepsilon_0 > 0$  annehmen mit

$$\left\| \frac{K_\varepsilon(x) - x}{\varepsilon} \right\| \leq C \quad \text{für } x \in U, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0.$$

Wir wählen nun  $\rho > 0$  mit  $B_\rho(p) \subseteq U$ . Weiter seien  $|t|$  so klein und  $n \in \mathbb{N}$  so groß, daß die Bedingungen  $C|t| < \rho$  und  $|t|/n \leq \varepsilon_0$  gelten. Dann ist  $\xi := K_{t/n}(p)$  definiert, und wegen  $\|\xi - p\| = \|K_{t/n}(p) - p\| \leq C|t|/n \leq C|t| < \rho$  gilt  $\xi \in B_\rho(p) \subseteq U$ . Also ist auch  $K_{t/n}(\xi) = K_{t/n}^2(p)$  definiert, und wir erhalten  $\|K_{t/n}^2(p) - p\| \leq \|K_{t/n}(\xi) - \xi\| + \|\xi - p\| \leq (C|t|/n) + (C|t|/n) = 2C|t|/n \leq C|t| < \rho$ . Fahren wir in dieser Weise fort, so erkennen wir, daß  $K_{t/n}^k(p)$  für  $0 \leq k \leq n$  definiert ist, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|K_{t/n}^n(p) - p\| &= \left\| \sum_{k=1}^n \left( K_{t/n}^k(p) - K_{t/n}^{k-1}(p) \right) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left\| K_{t/n}^k(p) - K_{t/n}^{k-1}(p) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{C|t|}{n} = C|t| < \rho. \end{aligned}$$

Wir schreiben nun  $\varphi_t(p) - K_{t/n}^n(p) = \varphi_{t/n}^n(p) - K_{t/n}^n(p)$  als Teleskopsumme

$$\begin{aligned} &\varphi_{t/n}^{n-1}(\varphi_{t/n}(p)) - \varphi_{t/n}^{n-1}(\underbrace{K_{t/n}(p)}_{=:x_1}) \\ &+ \varphi_{t/n}^{n-2}(\varphi_{t/n}(x_1)) - \varphi_{t/n}^{n-2}(\underbrace{K_{t/n}(x_1)}_{=:x_2}) \\ &+ \varphi_{t/n}^{n-3}(\varphi_{t/n}(x_2)) - \varphi_{t/n}^{n-3}(\underbrace{K_{t/n}(x_2)}_{=:x_3}) \\ &+ \dots \\ &+ \varphi_{t/n}(x_{n-1}) - K_{t/n}(x_{n-1}); \end{aligned}$$

mit  $x_k := K_{t/n}^k(p)$  gilt also

$$\varphi_t(p) - K_{t/n}^n(p) =$$

$$(\star\star) \sum_{k=1}^n \left( \varphi_{t/n}^{n-k}(\varphi_{t/n}(x_{k-1})) - \varphi_{t/n}^{n-k}(K_{t/n}(x_{k-1})) \right).$$

Nach der Gronwallschen Ungleichung gibt es nun eine Konstante  $\beta > 0$  mit  $\|\varphi_t(x) - \varphi_t(y)\| \leq e^{\beta|t|}\|x - y\|$  für alle  $x, y$  in einer Umgebung von  $p$ . Wenden wir dies auf  $(\star\star)$  an, so ergibt sich

$$\|\varphi_t(p) - K_{t/n}^n(p)\|$$

$$\leq \sum_{k=1}^n e^{\beta|t|(n-k)/n} \|\varphi_{t/n}(x_{k-1}) - K_{t/n}(x_{k-1})\|$$

$$\leq e^{\beta|t|} \cdot n \cdot o(t/n) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

wobei der Übergang von der ersten zur zweiten Zeile wegen Bedingung (3) gilt. Damit ist (a) gezeigt.

(b) Ist  $N$  genügend groß gewählt, so gilt nach Teil (a) und aufgrund der Kompaktheit von  $[0, T]$  die Aussage  $\varphi_{t/N} = \lim_{n \rightarrow \infty} K_{t/(nN)}^n$  gleichmäßig auf einer Umgebung  $V$  von  $\{\varphi_t(p) \mid 0 \leq t \leq T\}$ . (Wir ersetzen also sozusagen  $t$  durch  $t/N$ , was auf  $[0, T]$  gleichmäßig durch  $T/N$  beschränkt ist.) Für  $0 \leq t \leq T$  gilt dann  $\varphi_t = \varphi_{t/N}^N = \lim_{n \rightarrow \infty} K_{t/(nN)}^n = \lim_{m \rightarrow \infty} K_{t/m}^m$  gleichmäßig auf  $V$ .

(c) Es sei  $I$  die Menge aller  $t \in [0, T]$ , für die  $\varphi_t(p)$  definiert und gleich  $\alpha(t)$  ist. Nach (a) ist  $I$  nicht leer und offen. Aber  $I$  ist auch abgeschlossen; ist nämlich  $(t_k)$  eine Folge in  $I$  mit  $t_k \rightarrow t$ , so gilt  $\varphi_{t_k}(p) = \alpha(t_k) \rightarrow \alpha(t)$ , so daß auch  $\varphi_t(p)$  definiert ist und aus Stetigkeitsgründen auch  $\varphi_t(p) = \alpha(t)$  und damit  $t \in I$  gelten muß. Da  $[0, T]$  zusammenhängend ist, folgt hieraus  $I = [0, T]$ .

**Lösung (7.4)** (a) Wir wenden Aufgabe (7.3) an auf

$$K_\varepsilon := \varphi_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon.$$

(b) Wende Aufgabe (7.3) an auf

$$K_\varepsilon := \psi_{-\sqrt{\varepsilon}} \circ \varphi_{-\sqrt{\varepsilon}} \circ \psi_{\sqrt{\varepsilon}} \circ \varphi_{\sqrt{\varepsilon}}.$$

**Lösung (7.5)** (a) Der lokale Fluß von  $X$  ergibt sich durch Lösen des Anfangswertproblems  $\dot{x} = x, \dot{y} = y, x(0) = x_0, y(0) = y_0$ ; wir erhalten

$$\varphi_t(x_0, y_0) = e^t \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Der lokale Fluß von  $Y$  ergibt sich durch Lösen des Anfangswertproblems  $\dot{x} = -y, \dot{y} = x, x(0) = x_0, y(0) = y_0$ ; wir erhalten

$$\psi_s(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Offensichtlich gilt  $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$  für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  (es ist egal, ob man zuerst um den Winkel  $s$  dreht und dann um den Faktor  $e^t$  streckt oder umgekehrt); die beiden Flüsse kommutieren also. Damit gilt  $[X, Y] = 0$  (was man natürlich auch direkt nachrechnen kann).

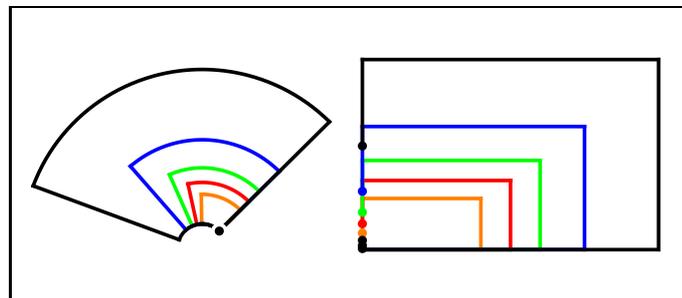


Illustration der Lieklammer  $[X, Y]$ : Links für Teil (a), rechts für Teil (b).

(b) Der lokale Fluß von  $X$  ergibt sich durch Lösen des Anfangswertproblems  $\dot{x} = 1, \dot{y} = 0, x(0) = x_0, y(0) = y_0$ ; wir erhalten

$$\varphi_t(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} x_0 + t \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Der lokale Fluß von  $Y$  ergibt sich durch Lösen des Anfangswertproblems  $\dot{x} = 0, \dot{y} = x, x(0) = x_0, y(0) = y_0$ ; wir erhalten

$$\psi_s(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_0 s + y_0 \end{bmatrix}.$$

Die Lieklammer von  $X$  und  $Y$  ist  $[X, Y] = XY - YX = \partial/\partial y$ .

**Lösung (7.6)** (a) Wir berechnen

$$[X, Y] = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} = Z,$$

$$[Y, Z] = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} = X,$$

$$[Z, X] = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} = Y.$$

Aufgrund der Bilinearität der Lieklammeroperation führt also das Bilden von Lieklammern nicht aus  $\mathbb{R}X + \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z$  heraus.

(b) Die Abbildung ist eindeutig festgelegt durch ihre Werte auf den Basisvektoren, also durch  $X \mapsto e_x, Y \mapsto e_y$  und  $Z \mapsto e_z$ , wenn  $e_x, e_y, e_z$  die Einheitsvektoren von  $\mathbb{R}^3$  in der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung bezeichnen. Vergleich von (a) mit den Relationen

$$e_x \times e_y = e_z, \quad e_y \times e_z = e_x, \quad e_z \times e_x = e_y$$

liefert dann die Behauptung.

(c) Die Integralkurven von  $aX + bY + cZ$  sind die Lösungen der Differentialgleichung

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

die wir mit  $\omega := (a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3$  kurz in der Form  $\dot{\xi} = L(\omega)\xi$  schreiben können. Der Fluß des Vektorfeldes ist daher gegeben durch  $\varphi_t(p) = \exp(tL(\omega))p$ . Dabei ist  $\exp(tL(\omega))$  die Drehung um die Achse  $\mathbb{R}n$  mit  $n := \omega/\|\omega\|$  um den Winkel  $t\|\omega\| = t\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

**Lösung (7.7)** Wir wissen, daß Differentialoperationen zweiter Ordnung, die sich bei Kommutatorbildung ergeben, sich von allein wegheben; wir müssen also nur die jeweils entstehenden Differentialoperatoren erster Ordnung ermitteln. Für  $[S, D] = SD - DS$  ergibt sich

$$-\sin(\varphi+\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(\varphi+\theta)\frac{\partial}{\partial y} + \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial \varphi} = W.$$

Für  $[S, W] = SW - WS$  ergibt sich

$$-\cos(\varphi+\theta)\frac{\partial}{\partial x} - \sin(\varphi+\theta)\frac{\partial}{\partial y} - \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial \varphi} = -D.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} [W, D] &= \cos(\theta) \left( -\sin(\varphi+\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(\varphi+\theta)\frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &\quad - \sin(\theta) \left( -\cos(\varphi+\theta)\frac{\partial}{\partial x} - \sin(\varphi+\theta)\frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= (\sin(\theta)\cos(\varphi+\theta) - \cos(\theta)\sin(\varphi+\theta))\frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad + (\cos(\theta)\cos(\varphi+\theta) + \sin(\theta)\sin(\varphi+\theta))\frac{\partial}{\partial y} \\ &= -\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial y} = G. \end{aligned}$$

Man erkennt sofort  $[G, S] = 0$ , da die Koeffizientenfunktionen von  $S$  nicht von  $x$  und  $y$  und die Koeffizientenfunktion von  $G$  nicht von  $\theta$  abhängen. Ferner erhalten wir

$$\begin{aligned} [G, D] &= GD - DG \\ &= -\sin(\theta) \left( -\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial x} - \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \sin(\theta) \left( \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [G, W] &= GW - WG \\ &= -\cos(\theta) \left( -\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial x} - \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \cos(\theta) \left( \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

**Lösung (7.8)** Wir fassen Vektorfelder als Differentialoperatoren auf. Anwendung von  $[fX, gY]$  auf eine Funktion  $h$  liefert dann

$$\begin{aligned} [fX, gY]h &= ((fX) \circ (gY))h - ((gY) \circ (fX))h \\ &= f \cdot X(g \cdot Yh) - g \cdot Y(f \cdot Xh) \\ &= f \cdot ((Xg)(Yh) + g(XYh)) - g \cdot ((Yf)(Xh) + f(YXh)) \\ &= (fg(XY - YX) + f(Xg)Y - g(Yf)X)h \\ &= (fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X)h. \end{aligned}$$

Da  $h$  beliebig war, folgt hieraus  $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$ .

**Lösung (7.9)** (a) Wegen  $\varphi_{tt} = \text{id}_M$  gilt  $\varphi'_{tt}(p) = \text{id}_{T_p M}$  für alle  $p \in M$  und folglich  $\Phi_{tt} = \text{id}_{TM}$ . Ferner gilt für alle  $(p, v) \in TM$  die Gleichungskette

$$\begin{aligned} (\Phi_{t_3 t_2} \circ \Phi_{t_2 t_1})(p, v) &= \Phi_{t_3 t_2}(\varphi_{t_2 t_1}(p), \varphi'_{t_2 t_1}(p)v) \\ &= (\varphi_{t_3 t_2}(\varphi_{t_2 t_1}(p)), \varphi'_{t_3 t_2}(\varphi_{t_2 t_1}(p))\varphi'_{t_2 t_1}(p)v) \\ &= ((\varphi_{t_3 t_2} \circ \varphi_{t_2 t_1})(p), (\varphi_{t_3 t_2} \circ \varphi_{t_2 t_1})'(p)v) \\ &= (\varphi_{t_3 t_1}(p), \varphi'_{t_3 t_1}(p)v) = \Phi_{t_3 t_1}(p, v), \end{aligned}$$

wobei wir beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile die Kettenregel benutzten.

(b) Wieder wegen  $\varphi_{tt} = \text{id}_M$  und  $\varphi'_{tt}(p) = \text{id}_{T_p M}$  für alle  $p \in M$  gilt  $\Psi_{tt} = \text{id}_{T^*M}$ . Ferner gilt für alle  $(p, \lambda) \in T^*M$  die Gleichungskette

$$\begin{aligned} (\Psi_{t_3 t_2} \circ \Psi_{t_2 t_1})(p, \lambda) &= \Psi_{t_3 t_2}(\varphi_{t_2 t_1}(p), \lambda \circ \varphi'_{t_2 t_1}(p)^{-1}) \\ &= (\varphi_{t_3 t_2}(\varphi_{t_2 t_1}(p)), (\lambda \circ \varphi'_{t_2 t_1}(p)^{-1}) \circ (\varphi'_{t_3 t_2}(\varphi_{t_2 t_1}(p))^{-1}) \\ &= ((\varphi_{t_3 t_2} \circ \varphi_{t_2 t_1})(p), \lambda \circ (\varphi_{t_3 t_2} \circ \varphi_{t_2 t_1})'(p)^{-1}) \\ &= (\varphi_{t_3 t_1}(p), \lambda \circ \varphi'_{t_3 t_1}(p)^{-1}) = \Psi_{t_3 t_1}(p, \lambda), \end{aligned}$$

wobei wir beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile wieder die Kettenregel benutzten.

**Lösung (7.10)** (a) Soll  $\Psi_{ts} := \Phi \circ \varphi_{ts}$  einen lokalen Fluß definieren, so muß insbesondere  $\text{id}_M = \psi_{tt} = \Phi \circ \varphi_{tt} = \Phi \circ \text{id}_M = \Phi$  gelten. Die einzige Abbildung  $\Phi$  mit der gewünschten Eigenschaft ist also die identische Abbildung  $\Phi = \text{id}_M$ .

(b) Wir haben  $\psi_{tt} = \Phi \circ \varphi_{tt} \circ \Phi^{-1} = \Phi \circ \text{id}_M \circ \Phi^{-1} = \Phi \circ \Phi^{-1} = \text{id}_N$  sowie

$$\begin{aligned} \psi_{t_3 t_2} \circ \psi_{t_2 t_1} &= (\Phi \circ \varphi_{t_3 t_2} \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ \varphi_{t_2 t_1} \circ \Phi^{-1}) \\ &= \Phi \circ (\varphi_{t_3 t_2} \circ \varphi_{t_2 t_1}) \circ \Phi^{-1} \\ &= \Phi \circ \varphi_{t_3 t_1} \circ \Phi^{-1} = \psi_{t_3 t_1} \end{aligned}$$

für alle Zeiten  $t_1, t_2, t_3$ . Damit sind die definierenden Eigenschaften eines Flusses nachgewiesen. Ist  $X$  das (zeitabhängige) Vektorfeld des lokalen Flusses  $(\varphi_{ts})$ , so ist das zu dem lokalen Fluß  $(\psi_{ts})$  gehörende (zeitabhängige) Vektorfeld gegeben durch

$$\begin{aligned} \widehat{X}(q, s) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \psi_{ts}(q) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \Phi \left( \varphi_{ts}(\Phi^{-1}(q)) \right) \\ &= \Phi' \left( \varphi_{ss}(\Phi^{-1}(q)) \right) X(\Phi^{-1}(q)) = \Phi'(\Phi^{-1}(q)) X(\Phi^{-1}(q)). \end{aligned}$$

(c) Dies ist ein Spezialfall von (b); wir müssen ja für  $\Phi$  nur die Translation  $\Phi(x) := x + x_0$  wählen. (Natürlich kann man die definierenden Eigenschaften eines lokalen Flusses auch durch direkte Rechnung verifizieren.)

**Lösung (7.11)** Offenbar ist  $\varphi_0$  die identische Abbildung. Setzen wir  $\zeta := \varphi_s(z)$ , so gilt  $|\zeta| = |z|$  und daher

$$\begin{aligned}(\varphi_t \circ \varphi_s)(z) &= \varphi_t(\zeta) = \zeta e^{itf(|\zeta|)} = \zeta e^{itf(|z|)} \\ &= (ze^{itf(|z|)})e^{isf(|z|)} = ze^{i(t+s)f(|z|)} = \varphi_{t+s}(z).\end{aligned}$$

Damit sind die Eigenschaften eines lokalen Flusses nachgewiesen. In reeller Schreibweise (mit  $z = x + iy$ ) erhalten wir

$$\varphi_{ts}(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(tf(\sqrt{x^2+y^2})) & -\sin(tf(\sqrt{x^2+y^2})) \\ \sin(tf(\sqrt{x^2+y^2})) & \cos(tf(\sqrt{x^2+y^2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Der Nullpunkt wird entfernt, weil die Funktion  $z \mapsto |z| = \sqrt{x^2+y^2}$  im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

**Lösung (7.12)** Aus  $\dot{x} = f(x)$  folgt  $\ddot{x} = f'(x)\dot{x} = f'(x)f(x)$ . Ist also  $x$  eine Lösung der Differentialgleichung  $\dot{x} = f(x)$ , so ist deren Taylorentwicklung gegeben durch

$$\begin{aligned}x(t) &= x(0) + t\dot{x}(0) + (t^2/2)\ddot{x}(0) + o(t^2) \\ &= x(0) + tf(x(0)) + (t^2/2)f'(x(0))(x(0)) + o(t^2).\end{aligned}$$

Analoge Formeln gelten für  $g$ ,  $-f$  und  $-g$  statt  $f$ . Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt  $x_0 = p$  und betrachten dann die Punkte

$$\begin{aligned}(\star) \quad x_1 &:= \varphi_t(x_0) = x_0 + tf(x_0) + (t^2/2)f'(x_0)f(x_0) + o(t^2), \\ x_2 &:= \psi_t(x_1) = x_1 + tg(x_1) + (t^2/2)g'(x_1)g(x_1) + o(t^2), \\ x_3 &:= \varphi_{-t}(x_2) = x_2 - tf(x_2) + (t^2/2)f'(x_0)f(x_0) + o(t^2), \\ x_4 &:= \psi_{-t}(x_3) = x_3 - tg(x_3) + (t^2/2)g'(x_3)g(x_3) + o(t^2).\end{aligned}$$

Wir haben zunächst  $x_1 = x_0 + \Delta_1$  mit  $\Delta_1 = tf(x_0) + (t^2/2)f'(x_0)f(x_0) + o(t^2)$ . Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned}g(x_1) &= g(x_0) + g'(x_0)\Delta_1 + o(\Delta_1) \\ &= g(x_0) + tg'(x_0)f(x_0) + o(t)\end{aligned}$$

und  $g'(x_1)g(x_1) = g'(x_0)g(x_0) + o(1)$ . Setzen wir dies in die zweite Gleichung in  $(\star)$  ein und fassen dann gleiche Potenzen von  $t$  zusammen, so erhalten wir  $x_2 = x_0 + \Delta_2$  mit

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= t(f(x_0) + g(x_0)) + (t^2/2)\dots \\ &\dots (f'(x_0)f(x_0) + 2g'(x_0)f(x_0) + g'(x_0)g(x_0)) + o(t^2).\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir  $f(x_2) = f(x_0 + \Delta_2)$  und damit

$$\begin{aligned}f(x_2) &= f(x_0) + f'(x_0)\Delta_2 + o(\Delta_2) \\ &= f(x_0) + tf'(x_0)(f(x_0) + g(x_0)) + o(t)\end{aligned}$$

sowie  $f'(x_2)f(x_2) = f'(x_0)f(x_0) + o(1)$ . Setzen wir dies in die dritte Gleichung in  $(\star)$  ein und fassen wieder gleiche Potenzen von  $t$  zusammen, so erhalten wir  $x_3 = x_0 + \Delta_3$  mit

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= tg(x_0) + (t^2/2)\dots \\ &\dots (2g'(x_0)f(x_0) - 2f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)g(x_0)) + o(t^2).\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir schließlich  $g(x_3) = g(x_0 + \Delta_3)$  und damit

$$\begin{aligned}g(x_3) &= g(x_0) + g'(x_0)\Delta_3 + o(\Delta_3) \\ &= g(x_0) + tg'(x_0)g(x_0) + o(t)\end{aligned}$$

sowie  $g'(x_3)g(x_3) = g'(x_0)g(x_0) + o(1)$ . Setzen wir dies in die vierte Gleichung in  $(\star)$  ein und fassen wieder gleiche Potenzen von  $t$  zusammen, so erhalten

$$x_4 = x_0 + t^2(g'(x_0)f(x_0) - f'(x_0)g(x_0)) + o(t^2),$$

also  $(\psi_{-t} \circ \varphi_{-t} \circ \psi_t \circ \varphi_t)(x_0) = x_0 + t^2(g'(x_0)f(x_0) - f'(x_0)g(x_0)) + o(t^2)$ . Dies ist die gesuchte Taylorentwicklung. Ersetzen wir  $t$  durch  $\sqrt{t}$  und schreiben wir  $p$  statt  $x_0$ , so bedeutet dies

$$\begin{aligned}(\psi_{-\sqrt{t}} \circ \varphi_{-\sqrt{t}} \circ \psi_{\sqrt{t}} \circ \varphi_{\sqrt{t}})(p) \\ = p + t(g'(p)f(p) - f'(p)g(p)) + o(t).\end{aligned}$$

Hieraus folgt  $(d/dt)|_{t=0}(\psi_{-\sqrt{t}} \circ \varphi_{-\sqrt{t}} \circ \psi_{\sqrt{t}} \circ \varphi_{\sqrt{t}})(p) = g'(p)f(p) - f'(p)g(p)$ .

**Lösung (7.13)** Wir benutzen jeweils die Formel

$$[f, g](x) = g'(x)f(x) - f'(x)g(x).$$

(a) Sind  $f(x) = c_1$  und  $g(x) = c_2$  konstant, so haben wir  $f'(x) = g'(x) = \mathbf{0}$  und daher  $[f, g](x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , also  $[f, g] = 0$ .

(b) Ist  $f(x) = Ax + b$  affin und  $g(x) = c$  konstant, so haben wir  $f'(x) = A$  und  $g'(x) = \mathbf{0}$  und damit  $[f, g](x) = -Ac$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Also ist  $[f, g]$  konstant. Ist umgekehrt  $f$  konstant und  $g$  affin, so ist  $[f, g] = -[g, f]$  dann ebenfalls konstant.

(c) Sind  $f(x) = Ax + a$  und  $g(x) = Bx + b$  affin, so haben wir  $f'(x) = A$  sowie  $g'(x) = B$  und daher  $[f, g](x) = B(Ax + a) - A(Bx + b) = (BA - AB)x + (Ba - Ab)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , so daß  $[f, g]$  ebenfalls affin ist.

**Lösung (7.14)** Die Eigendynamik des Systems (ohne steuernden Eingriff von außen) ist gegeben durch das Vektorfeld

$$X_0(x) = Ax.$$

(Man bezeichnet  $Ax$  als den "Driftterm" des Systems.) Durch Betätigung ausschließlich der  $i$ -ten Steuerung (sagen wir mit dem konstanten Wert  $u_i$  steuert man das System in Richtung des Vektorfeldes

$$X_i(x) = Ax + u_i b_i.$$

Da man das System sowohl in Richtung von  $X_0$  als auch in Richtung von  $X_i$  steuern kann, kann man es auch in die Richtung  $[X_i, X_0]$  steuern, wobei diese Lieklammer gegeben ist durch

$$[X_i, X_0](x) = [Ax + u_i b_i, Ax] = u_i [b_i, Ax] = u_i Ab_i.$$

Analog ist es auch möglich, das System in die Richtung

$$\begin{aligned} [[X_i, X_0], X_j] &= [u_i A b_i, Ax + u_j b_j] \\ &= [u_i A b_i, Ax] = u_i A^2 b_i \end{aligned}$$

zu steuern. Fahren wir durch Bilden höherer Lieklammern in dieser Weise fort, so erkennen wir, daß sich das System in jede der Richtungen  $u_i A b_i, u_i A^2 b_i, u_i A^3 b_i$  und so weiter steuern läßt. Ist also  $u_i$  ein zulässiger Wert der  $i$ -ten Steuerung, so kann das System so gesteuert werden, daß es einem beliebigen der Vektorfelder

$$Ax + u_i b_i, u_i A b_i, u_i A^2 b_i, u_i A^3 b_i, \dots, u_i A^{n-1} b_i$$

folgt. (Die Potenzen  $A^k$  mit  $k \geq n$  liefern nach dem Satz von Hamilton und Cayley keine neuen Steuerungsmöglichkeiten mehr.) Sind beliebig große Steuerwerte realisierbar, so können wir mit dem Faktor  $1/u_i$  skalieren, das System also so steuern, daß es einem beliebigen der Vektorfelder

$$(1/u_i)Ax + b_i, A b_i, A^2 b_i, A^3 b_i, \dots, A^{n-1} b_i$$

folgt. Für  $u_i \rightarrow \infty$  (vollständige Kompensation der Eigendynamik durch die aufgewendete Steuerung) sind das die Vektorfelder  $A^k b_i$  mit  $0 \leq i \leq n-1$ , also die Spalten der Kalman-Matrix

$$K = [B \mid AB \mid A^2 B \mid \dots \mid A^{n-1} B].$$

Hat diese Matrix vollen Rang (spannen also die Spalten von  $K$  den gesamten Zustandsraum  $\mathbb{R}^n$  auf), so kann das System in jede beliebige Richtung gesteuert werden. Dies bestätigt das Kalman-Kriterium, nach dem das betrachtete System vollständig steuerbar ist, wenn die Kalman-Matrix vollen Rang hat.

**Lösung (7.15)** Wir nutzen aus, daß es für lineare Systeme eine explizite Formel für die allgemeine Lösung gibt, nämlich

$$(*) \quad x_u(t) = X(t, t_0) \left( x_0 + \int_{t_0}^t X(t_0, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \right),$$

wenn  $X(t, s)$  den Fundamentaloperator der Gleichung  $\dot{x} = Ax$  bezeichnet. (Ist  $A$  nicht zeitabhängig, so ist  $X(t, s) = e^{(t-s)A}$ .) Wir halten nun die Zeit  $t$  fest und schreiben  $\mathfrak{U}$  für die Menge aller zulässigen Steuerungen auf dem festen Intervall  $I := [t_0, t]$ . Die Menge  $\mathfrak{U}$  ist die Einheitskugel in  $L^\infty(I)$  und damit konvex (wie jede Kugel in einem normierten Raum) und kompakt, wenn  $L^\infty(I)$  mit der  $w^*$ -Topologie versehen wird (nach dem Satz von Banach-Alaoglu). Wie man aus (\*) abliest, ist die Abbildung  $u \mapsto x_u(t)$  affin; also ist  $R_t$  konvex als Bild der konvexen Menge  $\mathfrak{U}$  unter einer affinen Abbildung. Ferner ist die Abbildung  $u \mapsto x_u(t)$  auch stetig (denn die  $w^*$ -Topologie ist ja gerade so definiert, daß  $u_i \rightarrow u$  genau dann gilt, wenn  $\int_I f u_i \rightarrow \int_I f u$  für alle  $f \in L^1(I)$  gilt);

also ist  $R_t$  kompakt als Bild der kompakten Menge  $\mathfrak{U}$  unter einer stetigen Abbildung.

**Lösung (7.16)** Es sei  $t_1 < t_2$ . Einen Zustand, der sich mit einer Steuerung  $u : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  zur Zeit  $t_1$  erreichen läßt, kann man auch zur Zeit  $t_2$  erreichen, indem man zunächst die Zeitspanne  $t_2 - t_1$  im Anfangszustand  $(0, 0)$  verharret und dann die Steuerung  $u$  zeitverzögert anwendet. Mit anderen Worten: Für die Steuerung  $v : [0, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$v(t) := \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_2 - t_1; \\ u(t - t_2 + t_1), & t_2 - t_1 < t \leq t_2 \end{cases}$$

gilt  $x_v(t_2) = x_u(t_1)$ . Wir berechnen jetzt für eine feste Zeit  $t$  den Rand der Erreichbarkeitsmenge  $R_t$ . Dazu sei  $u$  eine Randsteuerung, also eine Steuerung mit der Eigenschaft, daß die zugehörige Trajektorie  $x = x_u$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  die Eigenschaft hat, daß  $x(t)$  im Rand  $\partial R_t$  von  $R_t$  liegt. Wir führen die Hamiltonfunktion

$$H(x, y, \lambda, \mu, u) := \lambda y + \mu u$$

ein. Nach dem Pontrjagin-Prinzip gibt es dann eine von Null verschiedene Funktion  $t \mapsto (\lambda(t), \mu(t))$  derart, daß die Hamiltonschen Gleichungen

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \partial H / \partial \lambda = y, \\ \dot{y} &= \partial H / \partial \mu = u, \\ \dot{\lambda} &= -\partial H / \partial x = 0, \\ \dot{\mu} &= -\partial H / \partial y = -\lambda \end{aligned}$$

und die Maximumsbedingung

$$(2) \quad \begin{aligned} &H(x(t), y(t), \lambda(t), \mu(t), u(t)) \\ &= \max_{|u| \leq 1} H(x(t), y(t), \lambda(t), \mu(t), u) \end{aligned}$$

erfüllt sind. (Die Hamiltonschen Gleichungen besagen dabei gerade, daß  $(x, y, \lambda, \mu)$  eine Trajektorie des zu dem ursprünglichen System gehörigen Kotangentialflusses ist, daß also  $t \mapsto (\lambda(t), \mu(t))$  eine mit  $t \mapsto (x(t), y(t))$  "mitschwimmende" Linearform auf  $\mathbb{R}^2$  ist. Die Maximumsbedingung besagt gerade, daß sich  $R_t$  lokal immer auf einer Seite der Hyperebene  $\lambda(t)(x - x(t)) + \mu(t)(y - y(t)) = 0$  befindet.) Aus (1) erhalten wir sofort

$$(3) \quad \lambda(t) \equiv \lambda_0 \quad \text{und} \quad \mu(t) = -\lambda_0 t + \mu_0.$$

Aus (2) folgt

$$(4) \quad u(t) = \begin{cases} +1, & \text{falls } \mu(t) > 0; \\ -1, & \text{falls } \mu(t) < 0. \end{cases}$$

Für  $\mu(t) = 0$  wird  $u(t)$  durch Bedingung (2) nicht bestimmt. Wegen (3) ist aber  $\mu$  eine lineare Funktion, die maximal einen Vorzeichenwechsel hat (und insbesondere nicht auf einem ganzen Intervall verschwinden kann, was

zur Folge hätte, daß  $u$  auf diesem Intervall nicht bestimmt wäre). Es gibt also nur zwei Arten von Randsteuerungen: Steuerungen der Form

$$(5) \quad u(\tau) = \begin{cases} +1, & \text{falls } 0 \leq \tau \leq s, \\ -1, & \text{falls } s < \tau \leq t \end{cases}$$

mit einem Umschaltzeitpunkt  $s \in [0, t]$  (wobei der Spezialfall  $s = t$  erlaubt ist, bei dem  $u \equiv 1$  gilt und nicht umgeschaltet wird) und Steuerungen der Form

$$(6) \quad u(\tau) = \begin{cases} -1, & \text{falls } 0 \leq \tau \leq s, \\ +1, & \text{falls } s < \tau \leq t \end{cases}$$

mit einem Umschaltzeitpunkt  $s \in [0, t]$  (wobei der Spezialfall  $s = t$  erlaubt ist, bei dem  $u \equiv -1$  gilt und nicht umgeschaltet wird). Für jeden der beiden Fälle berechnen wir die jeweils resultierende Trajektorie.

• Für die Steuerung (5) haben wir  $\dot{x} = y$  und  $\dot{y} = 1$  auf dem Intervall  $[0, s]$  zusammen mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = 0$  und  $y(0) = 0$ , also

$$y(\tau) = \tau \quad \text{und} \quad x(\tau) = \frac{\tau^2}{2} \quad (0 \leq \tau \leq s).$$

Für den zweiten Zeitabschnitt  $[s, t]$  haben wir die Gleichungen  $\dot{x} = y$  und  $\dot{y} = -1$  mit den Anfangsbedingungen  $x(s) = s^2/2$  und  $y(s) = s$ ; die Lösung ist

$$y(\tau) = -\tau + 2s \quad \text{und} \quad x(\tau) = -\frac{\tau^2}{2} + 2s\tau - s^2 \quad (s \leq \tau \leq t).$$

Als Randpunkte der Erreichbarkeitsmenge  $R_t$  erhalten wir also durch Steuerungen der Form (5) alle Punkte der Menge

$$\left\{ \left( \frac{-t^2}{2} + 2st - s^2, -t + 2s \right) \mid 0 \leq s \leq t \right\}.$$

Bei dieser Menge handelt es sich um die Parameterdarstellung eines Parabelbogens (mit dem Parameter  $s$ ), der die Punkte  $(-t^2/2, -t)$  und  $(t^2/2, t)$  miteinander verbindet.

• Für die Steuerung (6) haben wir  $\dot{x} = y$  und  $\dot{y} = -1$  auf dem Intervall  $[0, s]$  zusammen mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = 0$  und  $y(0) = 0$ , also

$$y(\tau) = -\tau \quad \text{und} \quad x(\tau) = -\frac{\tau^2}{2} \quad (0 \leq \tau \leq s).$$

Für den zweiten Zeitabschnitt  $[s, t]$  haben wir die Gleichungen  $\dot{x} = y$  und  $\dot{y} = 1$  mit den Anfangsbedingungen  $x(s) = -s^2/2$  und  $y(s) = -s$ ; die Lösung ist

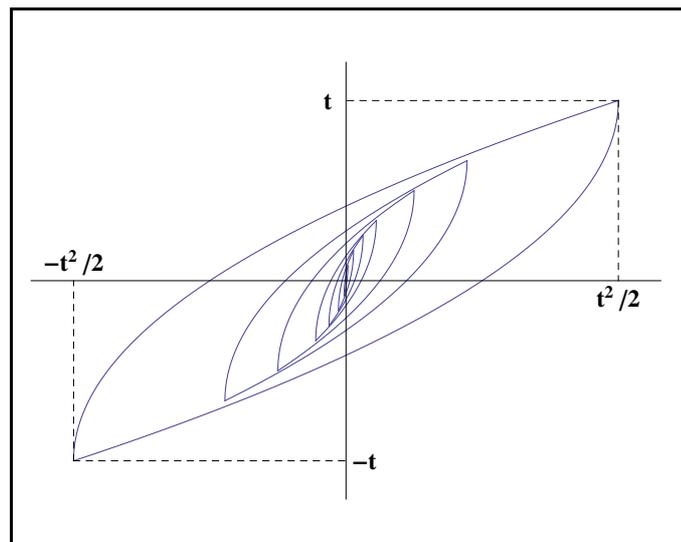
$$y(\tau) = \tau - 2s \quad \text{und} \quad x(\tau) = \frac{\tau^2}{2} - 2s\tau + s^2 \quad (s \leq \tau \leq t).$$

Als Randpunkte der Erreichbarkeitsmenge  $R_t$  erhalten wir also durch Steuerungen der Form (6) alle Punkte der Menge

$$\left\{ \left( \frac{t^2}{2} - 2st + s^2, t - 2s \right) \mid 0 \leq s \leq t \right\}.$$

Bei dieser Menge handelt es sich wieder um die Parameterdarstellung eines Parabelbogens (mit dem Parameter  $s$ ), der die Punkte  $(-t^2/2, -t)$  und  $(t^2/2, t)$  miteinander verbindet.

Der Rand der Erreichbarkeitsmenge  $\partial R_t$  ist dann die Vereinigung dieser beiden Parabelbögen. Da  $R_t$  nach der vorigen Aufgabe konvex sein muß, ist dann die Erreichbarkeitsmenge  $R_t$  gerade die konvexe Hülle von  $\partial R_t$ . Die folgende Skizze zeigt die Erreichbarkeitsmengen  $R_t$  für verschiedene Werte von  $t$  (beginnend mit  $t = 1/4$ , endend mit  $t = 3$ .)



Erreichbarkeitsmengen für den Raketenwagen.

Man erkennt zunächst die bereits zuvor festgestellte Tatsache, daß  $R_{t_1} \subseteq R_{t_2}$  für  $t_1 < t_2$ ; die Erreichbarkeitsmengen wachsen also monoton mit  $t$  hinsichtlich mengentheoretischer Inklusion. Für  $t$  nahe bei Null sind die Mengen sehr "steil"; je größer  $t$  wird, desto "flacher" werden sie. Auch das ist leicht erklärlich: wenn man ein Fahrzeug aus der Ruhe heraus beschleunigt, gewinnt man zunächst an Geschwindigkeit und nicht so sehr an Position; größere Positionsgewinne stellen sich erst mit wachsender Zeit ein.

**Lösung (7.17)** Am einfachsten ist es, Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  einzuführen; die Systemgleichungen gehen dann über in

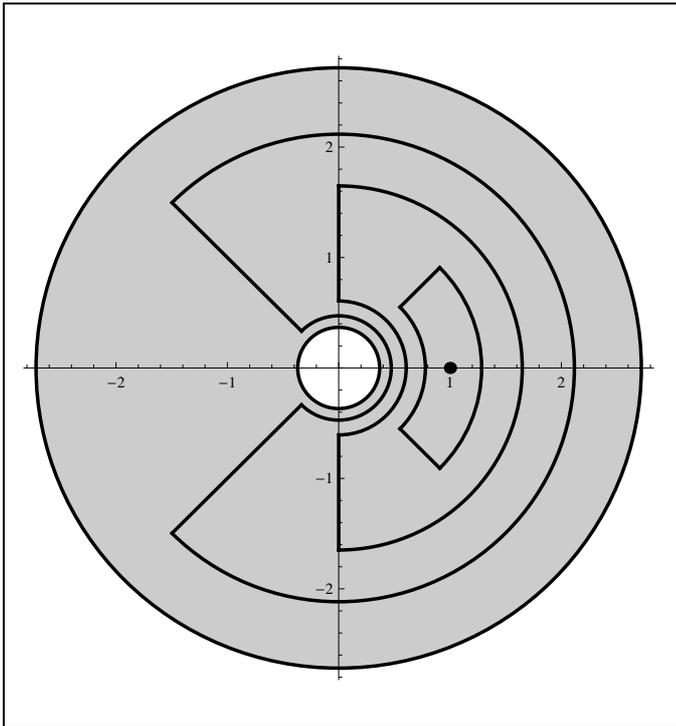
$$\dot{r} = ur \quad \text{und} \quad \dot{\varphi} = v.$$

(Nachrechnen!) Diese Gleichungen sind entkoppelt und lassen sich sofort integrieren; wir erhalten

$$\ln(r(T)) = \int_0^T u(t) dt \quad \text{und} \quad \varphi(T) = \int_0^T v(t) dt.$$

Wegen  $|u| \leq 1/\pi$  und  $|v| \leq 1$  ist klar, daß zu einer gegebenen Zeit  $T$  alle Werte  $(r(T), \varphi(T))$  mit  $\ln r(T) \in [-T/\pi, T/\pi]$  bzw.  $r(T) \in [e^{-T/\pi}, e^{T/\pi}]$  und  $\varphi(T) \in [-T, T]$  erreicht werden können. Die Erreichbarkeitsmenge  $R_T$  ist daher für  $T < \pi$  ein Kreissektor, für  $T \geq \pi$  ein

Kreisring mit Innenradius  $e^{-T/\pi}$  und Außenradius  $e^{T/\pi}$ . Insbesondere ist keine der Erreichbarkeitsmengen  $R_T$  konvex, und es gibt immer Randpunkte von  $R_T$ , an denen  $R_T$  keine Stützhyperebene besitzt (also keine Tangente derart, daß  $R_T$  lokal auf einer Seite dieser Tangente liegt). Dies ist aber kein Widerspruch zum Pontrjagin-Prinzip, denn legt man eine Tangente an einen solchen Randpunkt, so liegen alle Richtungsvektoren, die in die Erreichbarkeitsmenge hineinzeigen, auf einer Seite dieser Tangente; die Erreichbarkeitsmenge liegt also "infinitesimal" tatsächlich auf einer Seite dieser Tangente.



Erreichbarkeitsmengen des betrachteten Systems.