Matrix-Liegruppen

Lösung 1. Die Hintereinanderausführung zweier affiner Abbildungen f_{A_1,b_1} und f_{A_2,b_2} ist gegeben durch

$$\begin{aligned}(f_{A_1,b_1} \circ f_{A_2,b_2})(x) &= f_{A_1,b_1}\big(f_{A_2,b_2}(x)\big)\\ &= f_{A_1,b_1}(A_2x+b_2)\\ &= A_1(A_2x+b_2)+b_1\\ &= A_1A_2x+A_1b_2+b_1\\ &= f_{A_1A_2,A_1b_2+b_1}(x).\end{aligned}$$

Die Multiplikation (Hintereinanderausführung) zweier Matrizen der angegebenen Art ist gegeben durch

$$\begin{bmatrix} A_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2 & A_1b_2+b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wir sehen also, daß sich die Multiplikation solcher Matrizen "genauso" verhält wie die Hintereinanderausführung der zugehörigen affinen Abbildungen. In technischem Jargon ist also

$$f_{A,b} \mapsto \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ein Isomorphismus zwischen der Gruppe aller invertierbaren affinen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und der Gruppe aller Matrizen der angegebenen Form.

Lösung 2. Gäbe es eine reelle Matrix X mit $A = \exp(X)$, so wäre $1 = \det(A) = \det\big(\exp(X)\big) = e^{\mathrm{tr}(X)}$ und damit $\mathrm{tr}(X) = 0$, nach dem Satz von Hamilton und Cayley also $X^2 = -\det(X)\mathbf{1}$. Wählen wir eine komplexe Zahl δ mit $\delta^2 = -\det(X)$, so haben wir also $X^2 = \delta^2\mathbf{1}$, folglich $X^{2n} = \delta^{2n}\mathbf{1}$ und $X^{2n+1} = \delta^{2n}X$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ergibt

$$(\star)\qquad \begin{aligned}\exp(X) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{X^{2n}}{(2n)!}+\frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\delta^{2n}}{(2n)!}\,\mathbf{1}+\frac{\delta^{2n}}{(2n+1)!}\,X\right)\\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta^{2n}}{(2n)!}\right)\mathbf{1}+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)X\\ &= \cosh(\delta)\,\mathbf{1}+\frac{\sinh(\delta)}{\delta}\,X\end{aligned}$$

und damit $\mathrm{tr}\big(\exp(X)\big) = 2\cosh(\delta)$. (Für $\delta = 0$ ist der Ausdruck $\sinh(\delta)/\delta$ als 1 zu interpretieren.) Wegen $A = \exp(X)$ und $\mathrm{tr}(A) = -2$ gilt dann $2\cosh(\delta) = -2$, also $\cosh(\delta) = -1$, also $e^\delta + e^{-\delta} = -2$, also $0 = e^{2\delta} - 2e^\delta + 1 = (e^\delta+1)^2$ und damit $e^\delta = -1$ (was äquivalent ist mit $\delta = (2k+1)\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$). Aus $e^\delta = -1$ folgen aber die Beziehungen $\cosh(\delta) = -1$ und $\sinh(\delta) = 0$; Einsetzen in $(\star)$ ergibt dann $\exp(X) = -\mathbf{1} \neq A$ im Widerspruch zu der Annahme, es gelte $A = \exp(X)$. Es kann es also keine reelle Matrix X mit $A = \exp(X)$ geben. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix}\left(\mathbf{1}+\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\\ &= \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{bmatrix}\right)\exp\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

Um eine komplexe Matrix Y mit $A = \exp(Y)$ zu finden, machen wir den Ansatz

$$Y = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \exp(Y) = e^\lambda\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

der naheliegend ist, weil die Exponentialfunktion obere Dreiecksmatrizen auf ebensolche abbildet. Die gewünschte Gleichung $\exp(Y) = A$ führt dann auf $e^\lambda = -1$ (also $\lambda = (2k+1)\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$) und $a = -1$. Es gilt also beispielsweise

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \exp\left(\begin{bmatrix} \pi i & -1 \\ 0 & \pi i \end{bmatrix}\right).$$

Lösung 3. Aus $\|X\| < \ln(2)$ folgt

$$\begin{aligned}\|\exp(X)-\mathbf{1}\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|X\|^n}{n!}\\ &= e^{\|X\|}-1 < e^{\ln(2)}-1 = 2-1 = 1.\end{aligned}$$

Lösung 4. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(\mathbf{1}+tX) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}t^nX^n\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}t^{n-1}X^n = X\sum_{n=1}^{\infty}(-tX)^{n-1}\\ &= X\sum_{n=0}^{\infty}(-tX)^n = X(\mathbf{1}-tX)^{-1},\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung die Neumannsche Reihe wiedergibt.

Aufgabe 5. Zu bestimmen ist der Term vierter Ordnung in dem Ausdruck

$$\begin{aligned}F(X,Y) &= \log\left(\mathbf{1}+\Phi(X,Y)\right)\\ &= \Phi(X,Y)-\frac{\Phi(X,Y)^2}{2}+\frac{\Phi(X,Y)^3}{3}-\frac{\Phi(X,Y)^4}{4}\pm\cdots\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\Phi(X,Y) &= X+Y\\ &+\frac{X^2}{2}+XY+\frac{Y^2}{2}\\ &+\frac{X^3}{6}+\frac{X^2Y}{2}+\frac{XY^2}{2}+\frac{Y^3}{6}\\ &+\frac{X^4}{24}+\frac{X^3Y}{6}+\frac{X^2Y^2}{4}+\frac{XY^3}{6}+\frac{Y^4}{24}+\cdots\end{aligned}$$

Schreiben wir $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \cdots$ mit homogenen Komponenten Φ_k, so ergibt sich für den gesuchten Term vierter Ordnung der Ausdruck

$$\begin{aligned}&\Phi_4 - \frac{1}{2}(\Phi_1\Phi_3 + \Phi_2^2 + \Phi_3\Phi_1)\\&+ \frac{1}{3}(\Phi_1^2\Phi_2 + \Phi_1\Phi_2\Phi_1 + \Phi_2\Phi_1^2) - \frac{1}{4}\Phi_1^4,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}&\frac{X^4}{24} + \frac{X^3Y}{6} + \frac{X^2Y^2}{4} + \frac{XY^3}{6} + \frac{Y^4}{24}\\&- \frac{1}{2}(X+Y)\left(\frac{X^3}{6} + \frac{X^2Y}{2} + \frac{XY^2}{2} + \frac{Y^3}{6}\right)\\&- \frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{2} + XY + \frac{Y^2}{2}\right)^2\\&- \frac{1}{2}\left(\frac{X^3}{6} + \frac{X^2Y}{2} + \frac{XY^2}{2} + \frac{Y^3}{6}\right)(X+Y)\\&+ \frac{1}{3}(X+Y)^2\left(\frac{X^2}{2} + XY + \frac{Y^2}{2}\right)\\&+ \frac{1}{3}(X+Y)\left(\frac{X^2}{2} + XY + \frac{Y^2}{2}\right)(X+Y)\\&+ \frac{1}{3}\left(\frac{X^2}{2} + XY + \frac{Y^2}{2}\right)(X+Y)^2\\&- \frac{1}{4}(X+Y)^4.\end{aligned}$$

Eine völlig triviale, aber mühsame Rechnung (Ausmultiplizieren, Sortieren, Zusammenfassen) liefert den Term

$$\begin{aligned}&\frac{1}{24}\left(X^2Y^2 - Y^2X^2 + 2YXYX - 2XYXY\right)\\&= \frac{1}{24}\,[Y,[X,[Y,X]]]\,.\end{aligned}$$

(In Übereinstimmung mit dem Satz von Campbell-Baker-Hausdorff ist der gefundene Term vierter Ordnung also als ein Lieausdruck darstellbar.)

Lösung 6. (a) Jede Zusammenhangskomponente eines beliebigen topologischen Raums ist abgeschlossen; insbesondere ist also G_0 abgeschlossen. Wegen $e \in G_0$ ist G_0 nicht leer. Um G_0 als Untergruppe nachzuweisen, müssen wir zeigen, daß mit $x, y \in G_0$ auch $xy^{-1} \in G_0$ gilt. Dazu betrachten wir die (stetige) Abbildung

$$f : G_0 \times G_0 \to G, \quad (x,y) \mapsto xy^{-1}\,.$$

Als Produkt zusammenhängener Räume ist $G_0 \times G_0$ selbst zusammenhängend. Als Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung ist dann $f(G_0 \times G_0)$ ebenfalls zusammenhängend, Also ist $f(G_0 \times G_0)$ eine zusammenhängende Teilmenge von G, die $f(e,e) = e$ enthält, folglich enthalten in der maximalen solchen Menge, nämlich der Zusammenhangskomponente G_0. Daher gilt $f(G_0 \times G_0) \subseteq G_0$, und G_0 ist als Untergruppe nachgewiesen.

Wir wollen zeigen, daß G_0 sogar ein Normalteiler ist, daß also $gG_0g^{-1} = G_0$ für alle $g \in G$ gilt. Es sei also $g \in G$ beliebig. Da die Abbildung

$$\varphi : G \to G, \quad x \mapsto gxg^{-1}$$

(die man als Konjugation mit g bezeichnet) ein Homöomorphismus ist, bildet φ die Zusammenhangskomponente von e auf die Zusammenhangskomponente von $\varphi(e) = e$ ab; es gilt also $\varphi(G_0) = G_0$ bzw. $gG_0g^{-1} = G_0$, was zu zeigen war.

(b) Ist U eine offene Untergruppe von G, so sind auch die Linksnebenklassen gU offen in G (als homöomorphe Bilder von U). Es seien g_iU $(i \in I)$ die paarweise verschiedenen Nebenklassen außer U; dann ist $\bigcup_{i\in I} g_iU$ wieder offen (als Vereinigung offener Mengen). Die disjunkte Zerlegung

$$G \;=\; U \cup \bigcup_{i\in I} g_iU$$

zeigt dann, daß U abgeschlossen ist (als Komplement der offenen Menge $\bigcup_{i\in I} g_iU$).

Beispiele: Die Gruppe $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ zerfällt in die beiden Zusammenhangskomponenten $G_0 = \{g \in G \mid \det(g) > 0\}$ und $G_1 = \{g \in G \mid \det(g) < 0\}$; für jedes feste Element $\sigma \in G_1$ gilt $G_1 = \sigma G_0$. Die Gruppe $G = \mathrm{O}(n)$ zerfällt in die beiden Zusammenhangskomponenten $G_0 = \mathrm{SO}(n) = \{g \in G \mid \det(g) = 1\}$ und $G_1 = \{g \in G \mid \det(g) = -1\}$; für jedes feste Element $\sigma \in G_1$ gilt $G_1 = \sigma G_0$.

Lösung 7. Es sei $u \in U$ fest gewählt. Da U ein Normalteiler ist, ist die Abbildung

$$f : G \to U, \quad g \mapsto gug^{-1}$$

wohldefiniert (und stetig). Als Bild der zusammenhängenden Menge G unter der stetigen Abbildung f ist $f(G)$ zusammenhängend, folglich enthalten in der Zusammenhangskomponente von $f(e) = u$. Nach Voraussetzung ist diese Zusammenhangskomponente aber $\{u\}$. Es gilt also $f(G) \subseteq \{u\}$, folglich $gug^{-1} = u$ bzw. $gu = ug$ für alle $g \in G$. Das bedeutet aber gerade $u \in Z(G)$.

Lösung 8. Es sei $X \in L(G) = T_eG$; dann gibt es eine Kurve α in G mit $\alpha(0) = e$ und $\alpha'(0) = X$. Dann ist $\beta(t) := g\alpha(t)$ eine Kurve in G mit $\beta(0) = g$ und $\beta'(0) = gX$; also ist gX ein Element von T_gG. Eine analoge Überlegung zeigt, daß für jedes Element $Y \in T_gG$ durch $X := g^{-1}Y$ ein Element von T_eG mit $gX = Y$ gegeben ist. Ein analoges Ergebnis erhalten wir, wenn wir statt der Linksmultiplikation $X \mapsto gX$ die Rechtsmultiplikation $X \mapsto Xg$ verwenden. Also gilt

$$T_gG \;=\; \{gX \mid X \in L(G)\} \;=\; \{Xg \mid X \in L(G)\}\,.$$

Damit ist klar, daß die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} G\times L(G) & \to & TG \\ (g,X) & \mapsto & (g,gX) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} TG & \to & G\times L(G) \\ (g,Y) & \mapsto & (g,g^{-1}Y) \end{array}$$

zueinander inverse Diffeomorphismen sind; also gilt $TG \cong G\times L(G)$. Statt der Linkstranslationen $X\mapsto gX$ hätte man bei dieser Identifizierung auch die Rechtstranslationen $X\mapsto Xg$ benutzen können.

Lösung 9. (a) Wegen $g(t)g(t)^{-1} \equiv \mathbf{1}$ gilt $\mathbf{0} = g'(t)g(t)^{-1} + g(t)(g^{-1})'(t)$ und damit

$$(g^{-1})'(t) \;=\; -g(t)^{-1}g'(t)g(t)^{-1}.$$

Für $t=0$ ergibt sich wegen $g(0)=\mathbf{1}$ insbesondere $(g^{-1})'(0) = -g'(0) = -X$.

(b) Nach der Produktregel gilt

$$(g_1g_2)'(t) \;=\; g_1'(t)g_2(t) + g_1(t)g_2'(t)\,.$$

Für $t=0$ ergibt sich wegen $g_1(0)=g_2(0)=\mathbf{1}$ hieraus insbesondere $(g_1g_2)'(0) = g_1'(0)+g_2'(0) = X+Y$.

(c) Anwendung der Produktregel und der in (a) erhaltenen Regel liefert

$$\begin{aligned} &\partial_s|_{s=0}\,\partial_t|_{t=0}\; g_1(t)g_2(s)g_1(t)^{-1}g_2(s)^{-1} \\ &= \partial_s|_{s=0}\,\big(g_1'(t)g_2(s)g_1(t)g_2(s)^{-1} \\ &\qquad\qquad -g_1(t)g_2(s)g_1(t)^{-1}g_1'(t)g_1(t)^{-1}g_2(s)^{-1}\,|_{t=0}\big) \\ &= (\partial_s)\,|_{s=0}\,\big(X - g_2(s)Xg_2(s)^{-1}\big) \\ &= \; -g_2'(s)Xg_2(s)^{-1} + g_2(s)Xg_2(s)^{-1}g_2'(s)g_2(s)^{-1}\big|_{s=0} \\ &= \; -YX + XY \;=\; XY-YX \;=\; [X,Y]. \end{aligned}$$

Lösung 10. (a) Bilinearität und Schiefsymmetrie sind klar; die Jacobi-Identität gilt wegen

$$\begin{aligned} &[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \\ &= X(YZ-ZY) - (YZ-ZY)X \\ &\quad + Y(ZX-XZ) + (ZX-XZ)Y \\ &\quad + Z(XY-YX) - (XY-YX)Z \\ &= XYZ - XZY - YZX + ZYX \\ &\quad + YZX - YXZ + ZXY - XZY \\ &\quad + ZXY - ZYX - XYZ + YXZ \;=\; 0. \end{aligned}$$

(b) Wegen (a) genügt es zu zeigen, daß L abgeschlossen ist unter der Lieklammerbildung, daß also $XY-YX$ schiefsymmetrisch ist, wenn X und Y schiefsymmetrisch sind. Gelten die Bedingungen $X^T=-X$ und $Y^T=-Y$, so gilt $(XY-YX)^T = Y^TX^T - X^TY^T = (-Y)(-X) - (-X)(-Y) = YX-XY = -(XY-YX)$, was zu zeigen war.

(c) Bilinearität und Schiefsymmetrie der Kreuzproduktbildung sind klar; die Jacobi-Identität $u\times(v\times w)+v\times(w\times u)+w\times(u\times v)=0$ ergibt sich schnell unter Benutzung der Graßmannschen Identität $a\times(b\times c) = \langle a,c\rangle b - \langle a,b\rangle c$.

Der Zusammenhang zwischen (b) und (c) ergibt sich aus der Beobachtung, daß $L(u\times v) = L(u)L(v) - L(v)L(u)$ gilt, daß also die Kreuzproduktbildung zweier Vektoren $u,v\in\mathbb{R}^3$ der Kommutatorbildung der zugehörigen Matrizen $L(u)$ und $L(v)$ entspricht.

Lösung 11. (a) Die Linearität von $\mathrm{ad}(a)$ ist nichts anderes als die Linearität des Ausdrucks $[a,x]$ im zweiten Argument. Ferner gilt aufgrund der Jacobi-Identität und der Schiefsymmetrie der Lieklammer die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(a)[x,y] &= \big[a,[x,y]\big] \;=\; -\big[x,[y,a]\big] - \big[y,[a,x]\big] \\ &= \big[[a,x],y\big] + \big[x,[a,y]\big] \;=\; [\mathrm{ad}(a)x,y] + [x,\mathrm{ad}(a)y]. \end{aligned}$$

(b) Aufgrund der Jacobi-Identität gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}([a,b])x &= \big[[a,b],x\big] \;=\; -\big[x,[a,b]\big] \\ &= \big[a,[b,x]\big] - \big[b,[a,x]\big] \\ &= \mathrm{ad}(a)\big(\mathrm{ad}(b)x\big) - \mathrm{ad}(b)\big(\mathrm{ad}(a)x\big) \\ &= \big(\mathrm{ad}(a)\,\mathrm{ad}(b) - \mathrm{ad}(b)\,\mathrm{ad}(a)\big)x \end{aligned}$$

für alle $x\in L$ and damit $\mathrm{ad}([a,b]) = \mathrm{ad}(a)\,\mathrm{ad}(b) - \mathrm{ad}(b)\,\mathrm{ad}(a)$.

(c) Der Beweis erfolgt mit Induktion über die Anzahl n der auftretenden Lieklammerbildungen, wobei der Induktionsanfang $n=1$ trivial ist. Beim Induktionsschritt betrachten wir einen Ausdruck, der nicht schon selbst durch ausschließlich von links gebildete Lieklammern gegeben ist. Dann tritt innerhalb des Ausdrucks an mindestens einer Stelle eine Klammer der Form $\big[[a,b],c\big]$ oder $\big[[a,b],[c,d]\big]$ auf. Ein Ausdruck der ersten Form läßt sich wegen $\big[[a,b],c\big] = -\big[c,[a,b]\big]$ trivialerweise als Ausdruck darstellen, in dem nur Lieklammerbildungen von links vorkommen. Bei einem Ausdruck der Form $\big[[a,b],[c,d]\big]$ ist dies ebenfalls der Fall, denn ein solcher Ausdruck läßt sich umschreiben als

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}([a,b])[c,d] &= \mathrm{ad}(a)\,\mathrm{ad}(b)[c,d] - \mathrm{ad}(b)\,\mathrm{ad}(a)[c,d] \\ &= [a,[b,[c,d]]] - [b,[a,[c,d]]] \end{aligned}$$

und damit als ein Ausdruck, in dem jedenfalls extern nur noch von links gebildete Lieklammern auftreten. Auf diesen verbleibenden Ausdruck können wir jetzt die Induktionsannahme anwenden; die Behauptung folgt.

Lösung 12. Für $\alpha_1(t) := \exp(tX)\,Y\exp(-tX)$ gilt nach der Produktregel die Gleichung

$$\begin{aligned} \dot\alpha_1(t) &= X\exp(tX)\,Y\exp(-tX) - \exp(tX)\,Y\exp(-tX)X \\ &= X\alpha_1(t) - \alpha_1(t)X \;=\; [X,\alpha_1(t)]. \end{aligned}$$

Für $\alpha_2(t) := \exp\big(t\,\mathrm{ad}(X)\big)Y$ gilt

$$\begin{aligned} \dot\alpha_2(t) &= \mathrm{ad}(X)\exp\big(t\,\mathrm{ad}(X)\big)Y \\ &= \mathrm{ad}(X)\alpha_2(t) \;=\; [X,\alpha_2(t)]. \end{aligned}$$

Damit erfüllen α_1 und α_2 die gleiche Differentialgleichung $\dot\alpha(t) = [X, \alpha(t)]$ und auch die gleiche Anfangsbedingung $\alpha(0) = Y$, sind also nach dem Eindeutigkeitssatz für Anfangswertprobleme gleich.

Lösung 13. Zunächst liegt das Neutralelement $\mathbf{1}$ in jeder der Gruppen G_i und damit auch im Durchschnitt $G := \bigcap_{i\in I} G_i$. Liegt g in G, dann auch in jeder der Gruppen G_i; folglich liegt g^{-1} in jeder der Gruppen G_i und damit auch in G. Sind ferner $a, b \in G$ Elemente von G, so liegen a und b in jeder der Gruppen G_i; folglich liegt das Produkt ab in jeder der Gruppen G_i und damit auch in G. Also enthält G das Neutralelement $\mathbf{1}$ und ist abgeschlossen bezüglich Inversen- und Produktbildung. Damit ist G eine Gruppe im algebraischen Sinne. (Das Argument zeigt, daß ganz allgemein der Durchschnitt von Untergruppen einer Gruppe selbst wieder eine Untergruppe ist.)

Wir müssen noch zeigen, daß G abgeschlossen in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist. Dazu sei (g_n) eine Folge in G mit $g_n \to g$ in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Für jeden Index i ist dann (g_n) eine Folge in G_i, und da G_i abgeschlossen ist, folgt $g \in G_i$. Da der Index $i \in I$ beliebig war, gilt also $g \in \bigcap_{i\in I} G_i$. (Das Argument zeigt, daß ganz allgemein der Durchschnitt abgeschlossener Mengen eines topologischen Raums selbst wieder abgeschlossen ist.)

Zum Nachweis der Gleichung $T_gG = \bigcap_{i\in I} T_gG_i$ betrachten wir zunächst den Fall $g = \mathbf{1}$, also die Gleichung $L(G) = \bigcap_{i\in I} L(G_i)$. Diese ergibt sich aus den Äquivalenzen

$$\begin{aligned} X \in L(G) &\Leftrightarrow \exp(tX) \in G \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \exp(tX) \in G_i \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und alle } i \in I \\ &\Leftrightarrow X \in L(G_i) \text{ für alle } i \in I \\ &\Leftrightarrow X \in \bigcap_{i\in I} L(G_i). \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall ergibt sich dann mit Aufgabe 8, denn $T_gG = g \cdot T_{\mathbf{1}}G = g \cdot \bigcap_{i\in I} T_{\mathbf{1}}G_i = \bigcap_{i\in I} g \cdot T_{\mathbf{1}}G_i = \bigcap_{i\in I} T_gG_i$.

Lösung 14. Offenbar liegt die Einheitsmatrix in $D(n)$. Da die zu einer oberen Dreiecksmatrix inverse Matrix selbst wieder eine obere Dreiecksmatrix ist (was sich sofort aus dem Gaußschen Algorithmus ergibt), ist $D(n)$ abgeschlossen bezüglich der Inversenbildung. Da ferner das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen selbst wieder eine obere Dreiecksmatrix ist (was sofort aus der Definition der Matrizenmultiplikation folgt), ist $D(n)$ auch abgeschlossen bezüglich der Produktbildung. Damit ist $D(n)$ eine Matrizengruppe im algebraischen Sinn.

Wir wollen zeigen, daß $D(n)$ abgeschlossen in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist, und betrachten dazu ein Element $A \in (\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ im Abschluß von $D(n)$. Es gibt dann eine Folge von Matrizen $A_k \in D(n)$ mit $A_k \to A$. Wegen $(A_k)_{ij} = 0$ für alle $i > j$ und alle $k \in \mathbb{N}$ folgt für $k \to \infty$ dann $A_{ij} = 0$ für alle $i > j$ und damit $A \in D(n)$. Damit ist $D(n)$ abgeschlossen in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und folglich eine Matrix-Liegruppe. (Man prüft sofort nach, daß die Liealgebra von $D(n)$ gerade die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen ist.)

Das angegebene Argument zeigt nur, daß $D(n)$ nicht abgeschlossen im Raum $\mathbb{R}^{n\times n}$ aller $(n \times n)$-Matrizen ist. Relevant ist aber die Frage, ob $D(n)$ abgeschlossen ist im Raum $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ aller *invertierbaren* $(n\times n)$-Matrizen, und das ist der Fall.

Lösung 15. (a) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es einen Index K_ε mit $\| \sum_{k=k_1}^{k_2} f_k(n)\| < \varepsilon$ für alle $k_2 \geq k_1 \geq K_\varepsilon$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \to \infty$ folgt hieraus $\| \sum_{k=k_1}^{k_2} a_k\| \leq \varepsilon$ für alle $k_2 \geq k_1 \geq K_\varepsilon$. Nach dem Cauchy-Kriterium ist daher die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent.

Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es einen Index K_ε mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \| \sum_{k=1}^K f_k(n) - F(n)\| < \varepsilon/3$ und $\| \sum_{k=K}^\infty a_k\| < \varepsilon/3$ für alle $k \geq K_\varepsilon$. Wähle nun $N \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\| \sum_{k=1}^{K_\varepsilon} \big(f_k(n) - a_k\big)\| < \varepsilon/3$ für alle $n \geq N$ gilt. Für alle $n \geq N$ können wir $F(n) - \sum_{k=1}^\infty f_k(n)$ umschreiben als

$$F(n) - \sum_{k=1}^{K_\varepsilon} f_k(n) + \sum_{k=1}^{K_\varepsilon}\big(f_k(n) - a_k\big) + \sum_{k=K_{\varepsilon+1}}^{\infty} a_k.$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt daher

$$\begin{aligned} &\left\| F(n) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(n) \right\| \leq \\ &\left\| F(n) - \sum_{k=1}^{K_\varepsilon} f_k(n) \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{K_\varepsilon}\big(f_k(n) - a_k\big) \right\| + \left\| \sum_{k=K_{\varepsilon+1}}^{\infty} a_k \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also gilt $F(n) \to \sum_{k=1}^\infty a_k$ für $n \to \infty$.

(b) Für alle $k_2 \geq k_1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left\| \sum_{k=k_1}^{k_2} f_k(n) \right\| \leq \sum_{k=k_1}^{k_2} \|f_k(n)\| \leq \sum_{k=k_1}^{k_2} c_k,$$

und dieser Ausdruck geht wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_k c_k$ gegen Null für $k_1 \to \infty$. Das Cauchykriterium liefert dann die Behauptung.

Lösung 16. Es sei $e = \mathbf{1}$ die Einheitsmatrix, also das Neutralelement von G. Die Elemente von $L(G)$ sind die Matrizen der Form $\dot\alpha(0)$, wenn α eine Kurve in G mit $\alpha(0) = e$ ist. Eine solche Kurve ist von der Form

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit reellwertigen Funktionen a und b. Dann ist

$$\dot\alpha(0) = \begin{bmatrix} a'(0) & b'(0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Also gilt

$$L(G) \subseteq \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Wegen $\dim L(G) = \dim G = 2$ gilt aus Dimensionsgründen sogar Gleichheit. Das sieht man auch direkt durch Betrachten der Kurve

$$\alpha(t) = \exp\left(t \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{t\alpha} & (e^{t\alpha}-1)\beta/\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

wobei $(e^{t\alpha}-1)/\alpha$ für $\alpha = 0$ im Sinne der Regel von de l'Hospital als $t\beta$ zu interpretieren ist:

$$\exp\left(t \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & t\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es sei $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ein beliebiges Element von G. Die Linksmultiplikation $L_g : G \to G$ ist gegeben durch

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ay+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

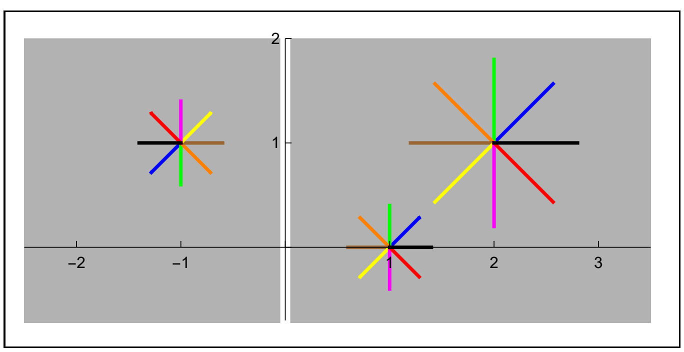
die Rechtsmultiplikation $R_g : G \to G$ dagegen durch

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & bx+y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

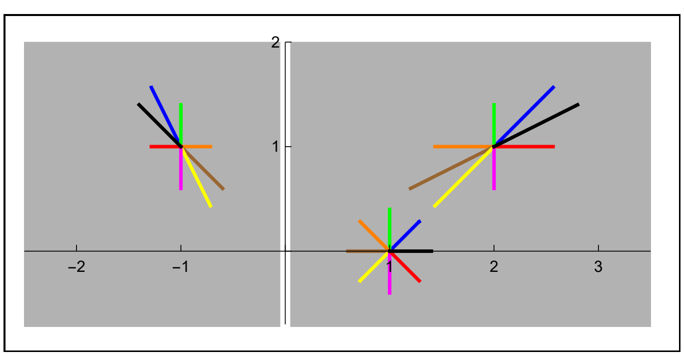
Durch Anwendung von L_g bzw. R_g gehen Kurven in G durch e in Kurven in G durch g und damit Tangentialvektoren an der Stelle e in Tangentialvektoren an der Stelle g über. Dies wird in den folgenden Abbildung für

$$g_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

illustriert. (Beachte, daß die Wirkung sowohl von L_{g_1} und L_{g_2} als auch diejenige von R_{g_1} auf $L(G)$ orientierungserhaltend ist, die Wirkung von R_{g_2} auf $L(G)$ aber orientierungsumkehrend.)



Identifizierung von $T_{g_i}G$ mit $g_i L(G)$ für $i = 1, 2$.



Identifizierung von $T_{g_i}G$ mit $L(G) g_i$ für $i = 1, 2$.

Bemerkung. Die Gruppe G besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten

$$G_0 = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a > 0\} \quad \text{und} \quad G_\star = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a < 0\},$$

wobei G_0 selbst eine Matrix-Liegruppe ist. Analog ist etwa $\mathrm{SO}(3)$ die Zusammenhangskomponente des Neutralelements in $\mathrm{O}(3)$.