L97: Begriff des Tangentialraums

Lösung (97.19) (a) Die Menge M ist eine Hyperbel mit den Asymptoten $y = \pm x$ und damit eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, und $p = (\sqrt{3}, \sqrt{2})$ ist ein Punkt von M. Wir geben drei verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung von T_pM an. Zum einen ist M die Nullstellenmenge der Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) := x^2 - y^2 - 1$. Wegen $g'(x,y) = (2x, -2y)$ gilt dann

$$\begin{aligned} T_pM &= \operatorname{Kern} g'(\sqrt{3}, \sqrt{2}) = \operatorname{Kern}(2\sqrt{3}, -2\sqrt{2}) \\ &= \operatorname{Kern}(\sqrt{3}, -\sqrt{2}) = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{3}x = \sqrt{2}y\}. \end{aligned}$$

Zum zweiten können wir M parametrisieren vermöge

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{bmatrix} =: \varphi(t) \quad \text{mit} \quad \varphi'(t) = \begin{bmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{bmatrix}.$$

Dabei gehört der Punkt $p = (\sqrt{3}, \sqrt{2})$ zum Parameterwert $t_0 = \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, wie man durch Lösen der Gleichung $\sinh(t) = \sqrt{2}$ erkennt. (Es reicht aber zu wissen, daß die Gleichungen $\cosh t_0 = \sqrt{3}$ und $\sinh t_0 = \sqrt{2}$ gelten.) Wir erhalten dann

$$T_pM = \operatorname{Bild} \varphi'(t_0) = \operatorname{Bild} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \mathbb{R} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Zum dritten können wir auch eine Parametrisierung von M dadurch erhalten, daß wir die Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ nach x oder y auflösen, sagen wir $x = \sqrt{1+y^2}$. (Wir müssen das positive Vorzeichen wählen, da wir M ja in einer Umgebung des Punktes $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ parametrisieren wollen, der einen positiven x-Wert hat.) Wir erhalten also die Parametrisierung

$$\Phi(y) := \begin{bmatrix} \sqrt{1+y^2} \\ y \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \Phi'(y) = \begin{bmatrix} y/\sqrt{1+y^2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es gilt dann

$$T_pM = \operatorname{Bild} \Phi'(\sqrt{2}) = \operatorname{Bild} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbb{R} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Die Menge M ist ein Ellipsoid mit den Halbachsen $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ und $\sqrt{3}$ und damit eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, und $p = (1,1,1)$ liegt auf diesem Ellipsoid. Wir geben drei verschiedene Berechnungen von T_pM an. Zum einen ist M die Nullstellenmenge der Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y,z) := 3x^2 + y^2 + 2z^2 - 6$. Wegen $g'(x,y,z) = (6x, 2y, 4z)$ gilt dann

$$\begin{aligned} T_pM &= \operatorname{Kern} g'(1,1,1) = \operatorname{Kern}(6,2,4) = \operatorname{Kern}(3,1,2) \\ &= \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y + 2z = 0\}. \end{aligned}$$

Zum zweiten können wir M schreiben als die Lösungsmenge der Gleichung

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

und damit unter Benutzung von Kugelkoordinaten parametrisieren durch

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\cos(u)\cos(v) \\ \sqrt{6}\sin(u)\cos(v) \\ \sqrt{3}\sin(v) \end{bmatrix} =: \varphi(u,v)$$

mit

$$\varphi'(u,v) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\sin(u)\cos(v) & -\sqrt{2}\cos(u)\sin(v) \\ \sqrt{6}\cos(u)\cos(v) & -\sqrt{6}\sin(u)\sin(v) \\ 0 & \sqrt{3}\cos(v) \end{bmatrix}.$$

Dabei gehört der Punkt $p = (1,1,1)$ zum Parameterwert $(u_0, v_0) = \big(\pi/6,\ \arcsin(1/\sqrt{3})\big)$. Unter Benutzung der Gleichungen

$$\sin(v_0) = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos(v_0) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ \sin(u_0) = \frac{1}{2},\ \cos(u_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

erhalten wir dann

$$\begin{aligned} T_pM &= \operatorname{Bild} \varphi'(u_0,v_0) = \operatorname{Bild} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \mathbb{R} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \mathbb{R} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zum dritten können wir auch eine Parametrisierung von M dadurch erhalten, daß wir die Gleichung $3x^2 + y^2 + 2z^2 = 6$ nach einer der Variablen auflösen, sagen wir $y = \sqrt{6 - 3x^2 - 2z^2}$. (Wir müssen das positive Vorzeichen wählen, da wir M ja in einer Umgebung des Punktes $(1,1,+1)$ parametrisieren wollen. Zum Punkt $p = (1,1,1)$ gehört dann der Parameterwert $(x_0, z_0) = (1,1)$.) Wir erhalten also die Parametrisierung

$$\Phi(x,z) := \begin{bmatrix} x \\ \sqrt{6 - 3x^2 - 2z^2} \\ z \end{bmatrix} \quad \text{mit}$$

$$\Phi'(x,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3x/\sqrt{6-3x^2-2z^2} & -2z/\sqrt{6-3x^2-2z^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} T_pM &= \operatorname{Bild} \Phi'(x_0,z_0) = \operatorname{Bild} \Phi'(1,1) \\ &= \operatorname{Bild} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Die Menge M wird parametrisiert durch

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \varphi'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix};$$

der Parameterwert zum Punkt $p = (1, 0, 2\pi) \in M$ ist $t_0 = 2\pi$. Wir erhalten daher

$$T_pM \;=\; \mathrm{Bild}\, \varphi'(t_0) \;=\; \mathrm{Bild} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;=\; \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alternativ können wir M schreiben als Nullstellenmenge der Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch

$$\begin{aligned} g(x, y, z) \;&=\; \begin{bmatrix} x - \cos(z) \\ y - \sin(z) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \\ g'(x, y, z) \;&=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin(z) \\ 0 & 1 & -\cos(z) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} T_pM \;&=\; \mathrm{Kern}\, g'(1, 0, 2\pi) \;=\; \mathrm{Kern} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y = z\} = \{(0, y, y)^T \mid y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Lösung (97.20) (a) Die Menge M ist die Nullstellenmenge der Funktion $g(x, y) := x^3 + y^3 = 1$, die auf M keine singulären Punkte hat. Für $p = (\sqrt[3]{2}, -1) =: (x_0, y_0)$ gilt $g'(p) = (3x_0^2, 3y_0^2) = 3\big(\sqrt[3]{4}, 1\big)$ und damit

$$\begin{aligned} T_pM \;&=\; \mathrm{Kern}\, g'(p) \;=\; \mathrm{Kern}\,(\sqrt[3]{4}, 1) \\ &=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt[3]{4}x + y = 0\}. \end{aligned}$$

Der Tangentialraum ist also die Gerade mit der Gleichung $y = -\sqrt[3]{4}\, x$. Zur besseren Visualisierung trägt man T_pM im Punkt p ab, interpretiert also p als den Nullpunkt des Tangentialraums T_pM.

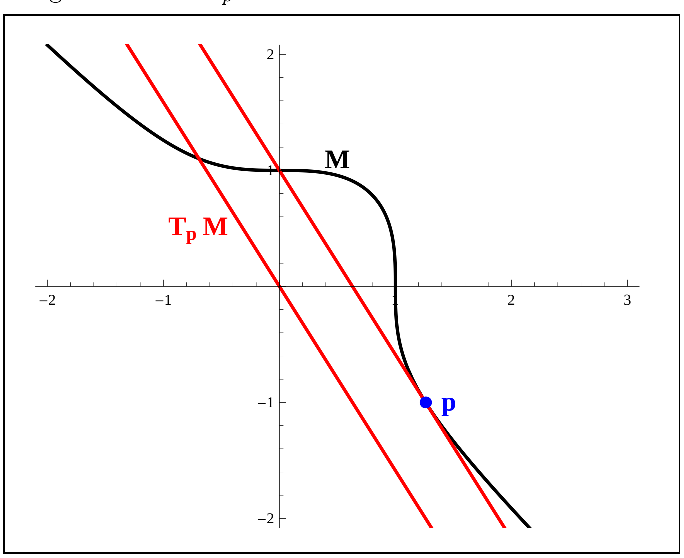


Abb. 97.20a: Verlauf der Kurve $x^3 + y^3 = 1$.

(b) Die Menge M ist die Nullstellenmenge der Funktion $g(x, y) := x^4 + y^4 = 1$, die auf M keine singulären Punkte hat. Für $p = (\sqrt{3/5}, \sqrt{4/5}) =: (x_0, y_0)$ gilt $g'(p) = (4x_0^3, 4y_0^3) = \big(4/(5\sqrt{5})\big)\,(3\sqrt{3}, 4\sqrt{4}) = \big(4/(5\sqrt{5})\big)\,(3\sqrt{3}, 8)$ und damit

$$\begin{aligned} T_pM \;&=\; \mathrm{Kern}\, g'(p) \;=\; \mathrm{Kern}\,(3\sqrt{3}, 8) \\ &=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3\sqrt{3}\, x + 8y = 0\}. \end{aligned}$$

Der Tangentialraum ist also die Gerade mit der Gleichung $y = -(3\sqrt{3}/8)\, x$. Auch hier zeichnen wir zur besseren Visualisierung statt T_pM den affinen Raum $p + T_pM$ ein; dieser ist gegeben durch die Gleichung $y = (-3\sqrt{3}x + 5\sqrt{5})/8$.

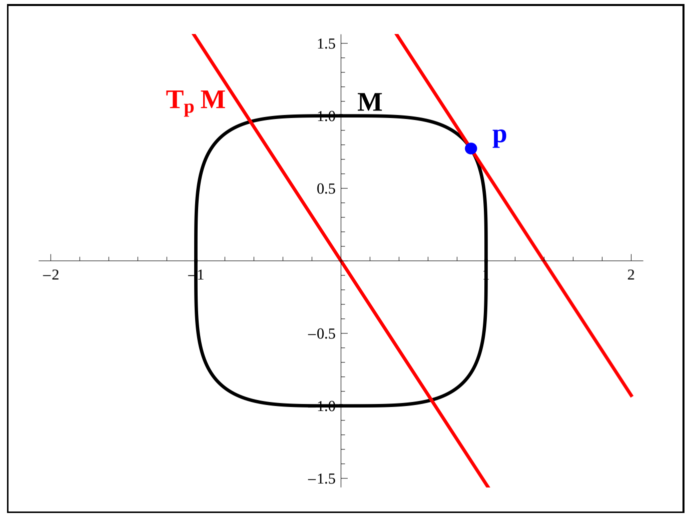
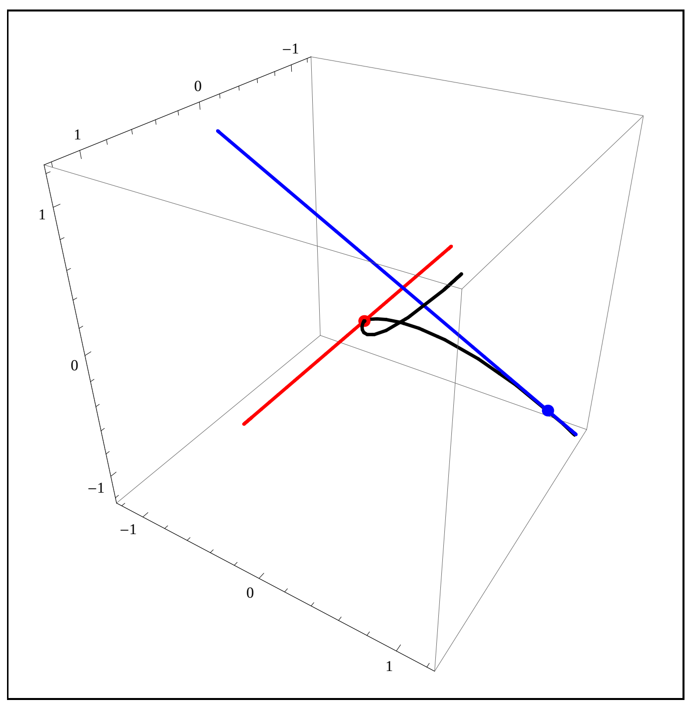


Abb. 97.20b: Verlauf der Kurve $x^4 + y^4 = 1$.

(c) Die Menge M ist das Bild der Abbildung $\varphi(t) = (t^3, t^4, t^5)$, die nur an der Stelle $t = 0$ eine Singularität hat. Es gilt $\varphi'(t) = (3t^2, 4t^3, 5t^4)^T$. Der Tangentialraum an der Stelle $p = (-1, 1, -1) = \varphi(-1)$ ist dann

$$T_pM \;=\; \mathrm{Bild}\, \varphi'(-1) \;=\; \mathrm{Bild} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} \;=\; \mathbb{R} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$



Verlauf der Kurve $t \mapsto (t^3, t^4, t^5)$ sowie der Tangenten an den Punkten $(-1, 1, -1)$ (blau) und $(0, 0, 0)$ (rot).

(d) Da die angegebene Parametrisierung an der Stelle $t = 0$ (als dem Parameterwert des betrachteten Punktes p) eine Singularität besitzt, müssen wir umparametrisieren. Wir betrachten die Parametrisierung $\widehat{\varphi}(\tau) := (\tau, \tau^{4/3}, \tau^{5/3})$ mit $\widehat{\varphi}'(\tau) = \big(1, (4/3)\tau^{1/3}, (5/3)\tau^{2/3}\big)^T$. Der Tangentialraum an der Stelle $p = (0,0,0) = \widehat{\varphi}(0)$ ist dann

$$T_pM \;=\; \mathrm{Bild}\,\widehat{\varphi}'(0) \;=\; \mathrm{Bild}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \;=\; \mathbb{R}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

(e) Für die gegebene Parametrisierung gilt

$$\varphi'(u,v) \;=\; \begin{bmatrix} -(R+r\cos v)\sin u & -r\sin v\cos u \\ (R+r\cos v)\cos u & -r\sin v\sin u \\ 0 & r\cos v \end{bmatrix}$$

und für $p := \varphi(\pi/4,\, \pi/3)$ damit

$$\begin{aligned} T_pM \;&=\; \mathrm{Bild}\,\varphi'(\pi/4, \pi/3) \\ &=\; \mathrm{Bild}\begin{bmatrix} -(R+r/2)/\sqrt{2} & -r\sqrt{3}/(2\sqrt{2}) \\ (R+r/2)/\sqrt{2} & -r\sqrt{3}/(2\sqrt{2}) \\ 0 & r/2 \end{bmatrix} \\ &=\; \mathrm{Bild}\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \;=\; \mathbb{R}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + \mathbb{R}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\-\sqrt{3}\\\sqrt{2}\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(f) Mit $g(x,y,z) := x^2 - 2xz + yz + z^2 + 2y + z - 4$ gilt $M = g^{-1}(0)$. Es gilt

$$g'(x,y,z) \;=\; \big(2x - 2z,\; z+2,\; -2x + y + 2z + 1\big),$$

und man prüft sofort nach, daß $g'(x,y,z) \neq (0,0,0)$ für alle $(x,y,z) \in M$ gilt. Also ist M eine Mannigfaltigkeit, und für $p = (1,1,1)$ gilt

$$T_pM = \mathrm{Kern}\, g'(p) = \mathrm{Kern}\,(0,3,2) = \{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \mid 3y + 2z = 0 \}.$$

Bemerkung. Es gilt

$$\begin{aligned} g(x,y,z) \;&=\; [x \quad y \quad z] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \\ &\quad +\; [0 \quad 2 \quad 1] \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} - 4. \end{aligned}$$

Die Menge M ist also eine Quadrik, die mit Methoden der Linearen Algebra (Hauptachsentransformation) auf einfachere Form gebracht werden kann. Der Tangentialraum T_pM ist dann einfach die Tangentialebene an diese Quadrik im Punkt p.

(g) Wir identifizieren M mit $\{(a,b,c,d)^T \in \mathbb{R}^4 \mid ad - bc = 1\}$, also $M = g^{-1}(0)$ mit $g(a,b,c,d) := ad - bc - 1$. Wegen

$$g'(a,b,c,d) \;=\; (d, -c, -b, a) \;\neq\; (0,0,0,0)$$

für alle $(a,b,c,d) \in M$ ist M eine Mannigfaltigkeit. Der Tangentialraum von M im Punkt $p = (2,3,3,5)$ ist dann

$$\begin{aligned} T_pM \;&=\; \mathrm{Kern}\, g'(p) \;=\; \mathrm{Kern}\,(5,-3,-3,2) \\ &=\; \{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} \mid 5x - 3y - 3z + 2w = 0 \}. \end{aligned}$$

Lösung (97.21) Die stereographische Projektion ist die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{(0,1)\}$, die gegeben ist durch

$$\varphi(\xi) \;=\; \frac{1}{\|\xi\|^2 + 1} \begin{bmatrix} 2\xi \\ \|\xi\|^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Für einen beliebigen Vektor $w \in \mathbb{R}^{n-1}$ gilt nun

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi)w \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \varphi(\xi + tw) \\ &=\; \frac{2}{(1+\|\xi\|^2)^2} \begin{bmatrix} (1+\|\xi\|^2)w - 2\langle \xi, w\rangle \xi \\ 2\langle \xi, w\rangle \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$\mathrm{Bild}\,\varphi'(\xi) \;=\; \begin{bmatrix} 2\xi \\ \|\xi\|^2 - 1 \end{bmatrix}^{\perp} \;=\; \varphi(\xi)^{\perp}.$$

Lösung (97.22) Es gilt

$$\begin{aligned} T\mathbb{S}^{n-1} \;&= \{(x,v) \mid x \in \mathbb{S}^{n-1},\; v \in T_x\mathbb{S}^{n-1}\} \\ &= \{(x,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1,\; \langle p, v\rangle = 0\} \\ &= \{(x,v) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1, x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = 0\} \\ &= \{(x,v) \in \mathbb{R}^{2n} \mid g_1(x,v) = 0,\; g_2(x,v) = 0\}, \end{aligned}$$

wobei $g_1, g_2 : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ definiert sind durch $g_1(x,v) := x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1$ und $g_2(x,v) := x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$.

Lösung (97.23) (a) Es gilt

$$\varphi'(u,v) \;=\; \begin{bmatrix} -R(1+\cos v)\sin u & -R\sin v\cos u \\ R(1+\cos v)\cos u & -R\sin v\sin u \\ 0 & R\cos v \end{bmatrix}.$$

(Dies entspricht dem Ergebnis von Aufgabe (97.20)(e) mit $r = R$.) Speziell für $v = \pi$ ergibt sich

$$\varphi'(u,\pi) \;=\; -R\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und damit sozusagen

$$T_{\varphi(u,\pi)}M \;=\; \mathrm{Bild}\,\varphi'(u,\pi) \;=\; \mathbb{R}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

("Sozusagen" in dem Sinne, daß wir den Tangentialraum für singuläre Punkte eigentlich gar nicht definiert haben.)

Dieses Ergebnis erklärt das "eindimensionale" Aussehen des Horntorus an der Stelle $(0,0,0)$.

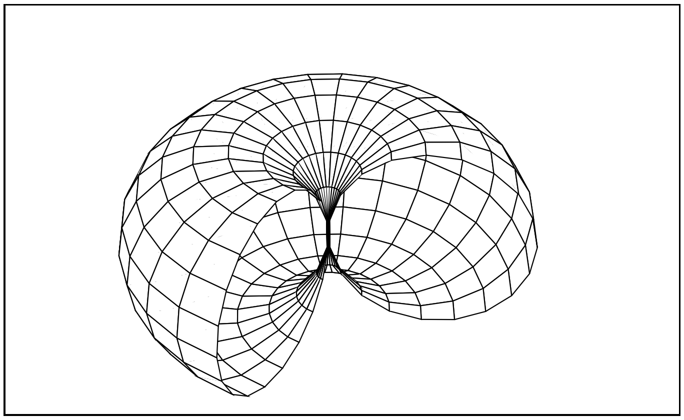


Abb. 97.23: Horntorus.

(b) Gemäß Aufgabe (97.9)(b) (mit $r=R$) ist M die Nullstellenmenge der Funktion $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= (x^2+y^2+z^2-2R^2)^2-4R^2(R^2-z^2)\\ &= (x^2+y^2+z^2)^2-4R^2(x^2+y^2). \end{aligned}$$

Es gilt

$$g'(x,y,z) = \begin{bmatrix} 4x(x^2+y^2+z^2-2R^2)\\ 4y(x^2+y^2+z^2-2R^2)\\ 4z(x^2+y^2+z^2)\end{bmatrix}^T$$

und damit $g'(0,0,0)=(0,0,0)$. An der singulären Stelle $p=(0,0,0)$ geht also der Zusammenhang zwischen der Dimension des Kerns von $g'(p)$ und der geometrischen Gestalt von M nahe p völlig verloren.

Lösung (97.24) (a) Der Nachweis findet sich als Beispiel (97.11)(e) des Buchs.

(b) Es seien $I\subseteq\mathbb{R}$ ein 0 enthaltendes Intervall und $\alpha:I\to\mathbb{R}^{3\times3}$ eine ganz in SO(3) verlaufende Kurve mit $\alpha(0)=\mathbf{1}$. Für alle $t\in I$ gilt dann $\alpha(t)^T\alpha(t)=\mathbf{1}$; Ableiten liefert $\dot\alpha(t)^T\alpha(t)+\alpha(t)^T\dot\alpha(t)=\mathbf{0}$ für alle $t\in I$. Speziell für $t=0$ ergibt sich $\dot\alpha(0)^T+\dot\alpha(0)=\mathbf{0}$; also ist $\dot\alpha(0)$ schiefsymmetrisch.

(c) Umgekehrt sei X schiefsymmetrisch. Dann definiert $\alpha(t):=\exp(tX)$ eine Kurve mit $\alpha(0)=\mathbf{1}$, die wegen $\alpha(t)^T\alpha(t)=\exp(tX)^T\exp(tX)=\exp(tX^T)\exp(tX)=\exp(-tX)\exp(tX)=\mathbf{1}$ ganz in SO(3) verläuft. Also ist $\dot\alpha(0)=X$ ein Element von T_eG. Wir können auch indirekt schließen: Nach Teil (b) gilt

$$(\star)\qquad T_eG\ \subseteq\ \{X\in\mathbb{R}^{3\times3}\mid X^T=-X\}.$$

Nun ist T_eG ein Vektorraum der Dimension $\dim G=3$, und die Menge aller schiefsymmetrischen Matrizen ist offensichtlich ebenfalls ein dreidimensionaler Vektorraum. Also haben die Vektorräume auf den beiden Seiten der Inklusion $(\star)$ die gleiche Dimension und sind daher gleich.

(d) Mit X und Y ist auch $[X,Y]$ schiefsymmetrisch, denn aus $X^T=-X$ und $Y^T=-Y$ folgt

$$\begin{aligned} [X,Y]^T &= (XY-YX)^T = Y^TX^T-X^TY^T\\ &= (-Y)(-X)-(-X)(-Y) = YX-XY\\ &= -(XY-YX) = -[X,Y]. \end{aligned}$$

(e) Ist $t\mapsto\gamma(t)$ eine Kurve in G mit $\gamma(0)=g$, so ist $\alpha(t):=g^{-1}\gamma(t)$ eine Kurve in G mit $\alpha(0)=\mathbf{1}$, so daß $X:=\dot\alpha(0)$ ein Element von T_eG ist. Also liegt $\dot\gamma(0)=g\dot\alpha(0)=gX$ in $g(T_eG)$. Damit ist die Inklusion $T_gG\subseteq g(T_eG)$ bewiesen. Ist umgekehrt $X\in T_eG$ beliebig, so gibt es eine in G verlaufende Kurve $t\mapsto\alpha(t)$ mit $\alpha(0)=e$ und $\dot\alpha(0)=X$. Dann ist aber $\gamma(t):=g\alpha(t)$ eine Kurve in G mit $\gamma(0)=g$, folglich $\dot\gamma(0)=g\dot\alpha(0)=gX$ ein Element von T_gG. Damit ist auch die Inklusion $g(T_eG)\subseteq T_gG$ gezeigt.

Lösung (97.25) (a) Es ist G die Nullstellenmenge der Funktion $\varphi:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ mit $\varphi(A):=\det(A)-1$. Für $A\in G$ und alle $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$ gilt nun

$$\begin{aligned} \varphi'(A)X &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\varphi(A+tX) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\det(A+tX)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\det(A)\,\det(\mathbf{1}+tA^{-1}X)\\ &= \det(A)\cdot\mathrm{tr}(A^{-1}X) = \mathrm{tr}(A^{-1}X); \end{aligned}$$

also hat $\varphi'(A)$ den Rang 1. Dies zeigt, daß G eine Mannigfaltigkeit der Dimension n^2-1 ist.

(b) Es seien $I\subseteq\mathbb{R}$ ein 0 enthaltendes Intervall und $\alpha:I\to\mathbb{R}^{n\times n}$ eine ganz in $G=\mathrm{SL}(n)$ verlaufende Kurve mit $\alpha(0)=\mathbf{1}$. Für alle $t\in I$ gilt dann $\det\big(\alpha(t)\big)=1$; Ableiten liefert $\det'\big(\alpha(t)\big)\dot\alpha(t)=0$ für alle $t\in I$. Speziell für $t=0$ ergibt sich, wenn wir kurz $X:=\dot\alpha(0)$ schreiben, die Gleichung

$$0 = \det{}'(\mathbf{1})X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\det(\mathbf{1}+tX) = \mathrm{tr}(X),$$

denn $\det(\mathbf{1}+tX)=1+t\cdot\mathrm{tr}(X)+$ höhere Potenzen von t. Also gilt $\mathrm{tr}(X)=0$ für alle $X\in T_eG$.

(c) Umgekehrt sei $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit der Spur 0. Dann definiert $\alpha(t):=\exp(tX)$ eine Kurve mit $\alpha(0)=\mathbf{1}$, die wegen $\det\big(\exp(tX)\big)=\exp\big(\mathrm{tr}(tX)\big)=\exp(0)=1$ ganz in G verläuft. Also ist $\dot\alpha(0)=X$ ein Element von T_eG. Wie in Lösung (97.24)(c) können wir auch hier ein Dimensionsargument anwenden. Nach Teil (b) gilt

$$(\star)\qquad T_eG\ \subseteq\ \{X\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid \mathrm{tr}(X)=0\}.$$

Nun ist T_eG ein Vektorraum der Dimension $\dim G=n^2-1$, und die Menge aller Matrizen mit verschwindender Spur ist offensichtlich ebenfalls ein Vektorraum der Dimension n^2-1. Also haben die Vektorräume auf den beiden Seiten der Inklusion $(\star)$ die gleiche Dimension und sind daher gleich.

(d) Es gilt $\mathrm{tr}([X,Y]) = \mathrm{tr}(XY - YX) = \mathrm{tr}(XY) - \mathrm{tr}(YX) = 0$ für alle $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, erst recht also für alle $X, Y \in T_eG$. Damit folgt die Behauptung.

(e) Der Beweis ist wortwörtlich derselbe wie in Teil (e) der vorhergehenden Aufgabe. Das ist kein Zufall, denn es wird nur ausgenutzt, daß G nicht nur eine Mannigfaltigkeit, sondern auch eine Gruppe ist.

Bemerkung. Diese und die vorhergehende Aufgabe sind strukturell gleich. Es wurde jeweils eine Menge G betrachtet, die gleichzeitig die (geometrisch-analytische) Struktur einer Mannigfaltigkeit und die (algebraische) Struktur einer Gruppe trägt. Diese beiden Strukturen sind gekoppelt, weil die algebraischen Operationen (Matrizenmultiplikation und -inversion) durch glatte Abbildungen gegeben sind; man sagt jeweils, G sei eine Lie-Gruppe (nach dem norwegischen Mathematiker Sophus Lie). In der Mathematik entwickeln sich immer dann reichhaltige Theorien, wenn solche gekoppelten Strukturen vorliegen, und die Theorie der Lie-Gruppen ist eine solche reichhaltige Theorie (mit Bezügen zu vielen anderen mathematischen Disziplinen und mit Anwendungen von den Grundlagen der Geometrie über die Relativitätstheorie bis zur Elementarteilchenphysik). Teil (d) drückt jeweils aus, daß (da G nicht nur eine Mannigfaltigkeit,m sondern auch eine Gruppe ist) der Tangentialraum T_eG nicht nur ein Vektorraum ist, sondern eine zusätzliche algebraische Struktur trägt (nämlich die einer Lie-Algebra), die ein "infinitesimales Abbild" der Gruppenstruktur ist.

Lösung (97.26) (a) Wir gehen die angegebenen Gruppen der Reihe nach durch.

• Die Gruppe $G_1 = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n\times n}$; also gilt $L(G_1) = T_{\mathbf{1}}(\mathbb{R}^{n\times n}) = \mathbb{R}^{n\times n}$.

• Für $G_2 = \mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R})$ gilt mit der gleichen Begründung wie für G_1 die Beziehung $L(G_2) = \mathbb{R}^{n\times n}$. (Das ist auch klar, weil $G_2 \subseteq G_1$ die Zusammenhangskomponente von $\mathbf{1}$ in G_1 ist.)

• Nach Definition ist klar, daß $G_3 = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n^2 - 1$ ist; also ist $L(G_3)$ ein Vektorraum der Dimension $n^2 - 1$. Ist X eine Matrix mit Spur Null, so ist $\alpha(t) := \exp(tX)$ eine Kurve mit $\alpha(0) = \mathbf{1}$, die wegen $\det\big(\exp(tX)\big) = e^{t\,\mathrm{tr}(X)} = e^0 = 1$ ganz in G_3 verläuft; es gilt daher $X = \alpha'(0) \in T_{\mathbf{1}}(G_3) = L(G_3)$. Also gilt $\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathrm{tr}(X) = 0\} \subseteq L(G_3)$. Sowohl die linke als auch die rechte Seite dieser Inklusion ist nun ein Vektorraum der Dimension $n^2 - 1$; also gilt sogar die Gleichheit

$$L(G_3) \;=\; \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}\,.$$

• Nach Aufgabe (97.16)(b) ist $G_4 = \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n(n-1)/2$. Ist $t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine in G_4 verlaufende Kurve mit $A(0) = \mathbf{1}$, so gilt $A(t)^T A(t) \equiv \mathbf{1}$, nach Ableiten also $A'(t)^T A(t) + A(t)^T A'(t) = \mathbf{0}$, was für $t = 0$ in $A'(0)^T + A'(0) = \mathbf{0}$ bzw. $A'(0)^T = -A'(0)$. Jedes Element von $L(G_4)$ ist also enthalten im Vektorraum aller schiefsymmetrischen $(n \times n)$-Matrizen. Da dieser offensichtlich (!) die Dimension $(n^2 - n)/2$ hat, gilt sogar die Gleichheit

$$L(G_4) \;=\; \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X^T = -X\}\,.$$

• Da $G_5 = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ offensichtlich eine offene Untermannigfaltigkeit von G_4 ist, gilt $L(G_5) = L(G_4)$. (Es ist $G_4 \subseteq G_5$ gerade die Zusammenhangskomponente von $\mathbf{1}$ in G_5.)

• Unter der Identifizierung

$$\begin{bmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow (A, v) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$$

erscheint $G_6 = \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ einfach als das direkte Produkt von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ und $\mathbb{R}^n$; der Tangentialraum von G_6 an der Stelle $\mathbf{1}$ entspricht dann dem Tangentialraum von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ an der Stelle $(\mathbf{1}, 0)$, und dieser ist $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^n$. Also gilt

$$L(G_6) \;=\; \{\begin{bmatrix} X & w \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid X \in \mathbb{R}^{n\times n},\, w \in \mathbb{R}^n\}.$$

(b) Bei der Behauptung

$$(\star) \qquad L(G) \;=\; \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \exp(\mathbb{R}X) \subseteq G\}.$$

ist die Inklusion $\supseteq$ trivial, denn für jede Matrix $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\exp(\mathbb{R}X) \subseteq G$ ist $\alpha(t) := \exp(tX)$ eine in G verlaufende Kurve mit $\alpha(0) = \mathbf{1}$ und $\alpha'(0) = X$; zu zeigen ist also nur die Inklusion $\subseteq$. Diese ist trivial für G_1 und G_2, denn für alle $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\det\big(\exp(tX)\big) = e^{t\,\mathrm{tr}(X)} > 0$. Für G_3 haben wir den Nachweis bereits in Teil (a) geführt. Für G_4 und G_5 gilt die Behauptung wegen

$$\begin{aligned} \exp(tX)^T \exp(tX) \;&=\; \exp(tX^T)\exp(tX) \\ &=\; \exp(-tX)\exp(tX) \;=\; \exp(\mathbf{0}) \;=\; \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Für G_6 folgt die Aussage schließlich, weil für eine Matrix

$$\begin{bmatrix} X & w \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in L(G_6)$$

(mit $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $w \in \mathbb{R}^n$) für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\begin{bmatrix} X & w \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n \;=\; \begin{bmatrix} X^n & X^{n-1}w \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gilt, aus der mit

$$\varphi(t, X) := t\mathbf{1} + \frac{t^2}{2!}X + \frac{t^3}{3!}X^2 + \frac{t^4}{4!}X^3 + \cdots$$

leicht die Gleichung

$$\exp\left(t\begin{bmatrix} X & w \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \;=\; \begin{bmatrix} \exp(tX) & \varphi(t,X)w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\in G_6$$

folgt.

(c) Daß mit X und Y auch $[X,Y] := XY - YX$ in $L(G)$ liegt, ist für G_1 und G_2 trivial und folgt für G_3 daraus, daß jede Matrix der Form $XY-YX$ die Spur Null hat. Für G_4 bzw. G_5 ist zu zeigen, daß mit X und Y auch $XY-YX$ schiefsymmetrisch ist; dies gilt wegen

$$\begin{aligned}&(XY-YX)^T \;=\; Y^TX^T - X^TY^T\\ =\;& (-Y)(-X)-(-X)(-Y) \;=\; YX-XY\\ =\;& -(XY-YX).\end{aligned}$$

Für G_6 folgt die Behauptung aus der Rechnung

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} X_1 & w_1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_w & w_w\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_2 & w_2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & w_1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\ =\;& \begin{bmatrix} X_1X_2 - X_2X_1 & X_1w_2 - X_2w_1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Die Lieklammer zweier Matrizen der Form $\begin{bmatrix} \star & \star\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ ist also wieder von dieser Form, und das war zu zeigen.

Lösung (97.27) (a) Genau dann gilt $B \in T_AM$, wenn es eine in M verlaufende Kurve $t \mapsto \alpha(t) \in \mathbb{R}^{n\times k}$ gibt mit $\alpha(0) = A$ und $\alpha'(0) = B$. Eine solche Kurve erfüllt $\alpha(t)^T\alpha(t) = \mathbf{1}$ und nach der Produktregel daher

$$\alpha'(t)^T\alpha(t) + \alpha(t)^T\alpha'(t) = \mathbf{0}$$

für alle t. Speziell für $t = 0$ folgt hieraus $B^TA + A^TB = \mathbf{0}$. Erfüllt umgekehrt B diese Bedingung, so sei $t \mapsto \alpha(t)$ die Lösung von $(\star)$, die die Anfangsbedingung $\alpha(0) = A$ erfüllt. Diese Kurve erfüllt dann $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\,\alpha(t)^T\alpha(t) = \mathbf{0}$, folglich $\alpha(t)^T\alpha(t) \equiv \alpha(0)^T\alpha(0) = A^TA = \mathbf{1}$, verläuft also in M. Daher gilt

$$T_AM \;=\; \{A \in \mathbb{R}^{n\times k} \mid B^TA + A^TB = \mathbf{0}\}.$$

(b) Speziell für $n = 4$ und $k = 2$ ergibt sich, wenn wir

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{6}\\ 1/2 & 1/\sqrt{6}\\ 1/2 & 0\\ 1/2 & -2/\sqrt{6}\end{bmatrix} \quad\text{und}\quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_5\\ b_2 & b_6\\ b_3 & b_7\\ b_4 & b_8\end{bmatrix}$$

schreiben, die Gleichung

$$\begin{aligned} B^TA + A^TB \;&=\; \begin{bmatrix} u & v\\ v & w\end{bmatrix} \quad \text{mit}\\ u \;&:=\; b_1+b_2+b_3+b_4,\\ v \;&:=\; (b_1+b_2-2b_4)/\sqrt{6} + (b_5+b_6+b_7+b_8)/2,\\ w \;&:=\; 2(b_5+b_6-2b_8)/\sqrt{6}.\end{aligned}$$

Identizieren wir $B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ mit $b \in \mathbb{R}^8$, so besteht also T_AM aus allen Vektoren $b \in \mathbb{R}^8$, die das homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; b_1+b_2+b_3+b_4\\ 0 \;&=\; 2\,(b_1+b_2-2b_4) + \sqrt{6}\,(b_5+b_6+b_7+b_8)\\ 0 \;&=\; b_5+b_6-2b_8 = 0\end{aligned}$$

erfüllen. Also ist T_AM ein Vektorraum der Dimension $8-3 = 5$ in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Aufgabe (97.15)(b).

Lösung (97.28) (a) Ableiten der Identität $f\big(x(c),c\big) = 0$ nach c liefert unter Benutzung der Kettenregel die Gleichung

$$\langle(\nabla_x f)\big(x(c)\big), x'(c)\rangle + \frac{\partial f}{\partial c}\big(x(c),c\big) \;=\; 0.$$

(b) Die Gerade $y = 0$ hat mit jeder der Parabeln $y = (x-c)^2$ genau einen Punkt gemeinsam, nämlich $(c,0)$. Ableiten der Bedingung $(x-c)^2 - y = 0$ nach c liefert $2(x-c) = 0$, also $x = c$. Die Enveloppe ist daher $\{(c,0) \mid c \in \mathbb{R}\}$, also die x-Achse, was auch geometrisch unmittelbar einleuchtet.

(c) Integrieren der Bewegungsgleichungen $\ddot{x} = 0$ und $\ddot{y} = -g$ führt auf $x(t) = v\cos(\alpha)\cdot t$ und $y(t) = -(gt^2/2) + v\sin(\alpha)t$. Die erste Gleichung liefert $t = x/(v\cos\alpha)$; Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt dann

$$(1)\qquad \begin{aligned} y \;&=\; \frac{-gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha\\ &=\; \frac{-gx^2}{2v^2}\big(1+\tan^2\alpha\big) + x\,\tan\alpha\end{aligned}$$

als explizite Darstellung der Kurve C_α. Durch Ableiten nach dem Parameter α erhalten wir die Enveloppenbedingung

$$0 \;=\; \frac{-gx^2\sin\alpha}{v^2\cos^3\alpha} + \frac{x}{\cos^2\alpha},$$

die nach Umformen auf

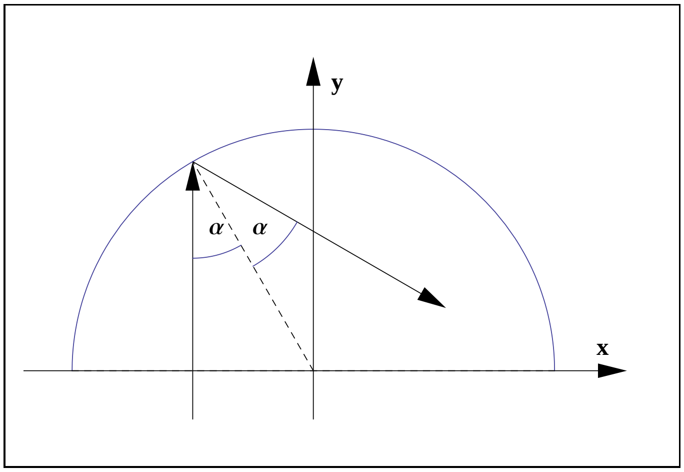
$$(2)\qquad x \;=\; \frac{v^2\cos\alpha}{g\sin\alpha} \quad\text{bzw.}\quad \tan\alpha \;=\; \frac{v^2}{gx}$$

führt. Setzen wir (2) in (1) ein, so ergibt sich

$$(3)\qquad y \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{g} - \frac{gx^2}{v^2}\right).$$

Dies ist die Gleichung einer nach unten geöffneten Parabel, deren Brennpunkt der Abschußpunkt $(0,0)$ ist.

Lösung (97.29) Wir wählen ein Koordinatensystem so, daß der Halbkreis durch die Gleichung $y = \sqrt{1-x^2}$ gegeben ist. Ferner parametrisieren wir die einfallenden Strahlen durch deren jeweiligen Winkel α mit dem Radiusvektor.



Der reflektierte Strahl, der zu dem einfallenden Strahl mit einem gegebenen Winkel α führt, hat dann den Steigungswinkel $2\alpha - (\pi/2)$ und geht durch den Punkt $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ und erfüllt folglich die Gleichung

$$\begin{aligned} y &= \tan\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\,(x + \sin\alpha) + \cos\alpha \\ &= \frac{-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}(x + \sin\alpha) + \cos\alpha \\ &= \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}\cdot x + \frac{1}{2\cos\alpha} \\ &= \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\frac{x}{2} + \frac{1}{2\cos\alpha}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Durch Ableiten nach dem Parameter α erhalten wir die Enveloppenbedingung

$$0 = \left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\cdot\frac{x}{2} + \frac{\sin\alpha}{2\cos^2\alpha},$$

die nach Durchmultiplizieren mit $2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ übergeht in

$$x = -\sin^3\alpha\,. \tag{2}$$

Setzen wir dies in (1) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\frac{-\sin^3\alpha}{2} + \frac{1}{2\cos\alpha} \\ &= \frac{-\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + 1}{2\cos\alpha} \\ &= \frac{(1-\sin^2\alpha)(1+\sin^2\alpha) + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{2\cos\alpha} \\ &= \frac{\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha) + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{2\cos\alpha} \\ &= \frac{\cos\alpha}{2}\cdot(1 + 2\sin^2\alpha). \end{aligned} \tag{3}$$

Die Gleichungen (2) und (3) zusammen ergeben eine Parameterdarstellung der gesuchten Enveloppe. Mit $\sin\alpha = -x^{1/3}$ gemäß (2) und damit $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^{2/3}}$ geht (3) über in die explizite Gleichung