L97: Mannigfaltigkeiten

Lösung (97.1) (a) Wir können etwa $F(x,y) := (x, y-|x|)$ wählen; F ist bijektiv mit der Umkehrfunktion $F^{-1}(x,y) = (x, y+|x|)$, und offensichtlich sind F und F^{-1} auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

(b) Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) := t \cdot \exp(-1/t^2)$ für $t \neq 0$ und $\varphi(0) := 0$ ist von der Klasse C^∞ (mit $\varphi^{(k)}(0) = 0$ für jede Ableitungsordnung k), wächst streng monoton und erfüllt $\varphi(t) \to \pm\infty$ für $t \to \pm\infty$ sowie $|\varphi(t)| = \varphi(|t|)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Definieren wir $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \big(\varphi(x), \varphi(y) - |\varphi(x)|\big) \\ &= \big(\varphi(x), \varphi(y) - \varphi(|x|)\big), \end{aligned}$$

so ist F bijektiv mit der Umkehrfunktion $F^{-1}(x,y) = \big(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y+|x|)\big)$, und offensichtlich ist F von der Klasse C^∞. (Die Umkehrfunktion F^{-1} ist zwar auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig, aber nicht differentiierbar, weil φ^{-1} im Nullpunkt keine Ableitung besitzt.) Da offensichtlich $F(M) = \mathbb{R} \times \{0\}$ gilt, erfüllt F die gewünschten Bedingungen.

(c) Teil (c) ergibt sich unmittelbar aus Teil (d).

(d) Gäbe es einen Diffeomorphismus $F : U \to V$ wie angegeben, so gäbe es ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und eine C^1-Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit

$$F^{-1}(x,0) = \big(\varphi(x), |\varphi(x)|\big)$$

für alle $x \in I$ und $\varphi(x_0) = 0$ an einer Stelle $x_0 \in I$.

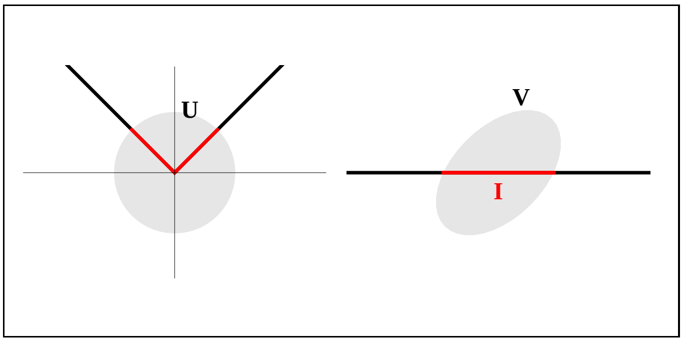


Abb. 97.1: Versuch, $M \cap U$ glatt in $V \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ zu deformieren.

Weil dann φ injektiv und stetig sein müßte, hätte φ links und rechts von x_0 unterschiedliche Vorzeichen; damit hätte dann auch der Differenzenquotient $\big(|\varphi(x_0+h)| - |\varphi(x_0)|\big)/h = |\varphi(x_0+h)|/h$ für $h > 0$ und $h < 0$ unterschiedliche Vorzeichen. Wegen der Differentiierbarkeit von F^{-1} müßte dann auch $|\varphi|$ an der Stelle x_0 differentiierbar sein, und aufgrund der angegebenen Vorzeichenbedingung müßte dann zwangsläufig $|\varphi|'(x_0) = 0$ gelten. Dann hätten wir wegen

$$\left| \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} - 0 \right| = \left| \frac{|\varphi(x_0+h)|}{h} \right| \to 0$$

für $h \to 0$ auch $\varphi'(x_0) = 0$ und folglich $(F^{-1})'(x_0, 0) = \mathbf{0}$ auf $\mathbb{R} \times \{0\}$, so daß $F'(x_0, 0)$ nicht invertierbar wäre, was natürlich der Bedingung widerspräche, daß F ein Diffeomorphismus ist. Der erhaltene Widerspruch zeigt, daß es keinen Diffeomorphismus $F : U \to V$ der angegebenen Art geben kann.

Lösung (97.2) (a) Offensichtlich ist $\{\varphi(t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(t,t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ gerade die erste Winkelhalbierende und damit ein affiner Unterraum (insbesondere also eine Untermannigfaltigkeit) von $\mathbb{R}^2$.

(b) Es gilt $\varphi'(t) = (3t^2, 3t^2)^T$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und damit $\varphi'(0) = (0,0)^T$, so daß die Parametrisierung φ an der Stelle $t = 0$ nicht regulär ist. Ferner gilt $g'(x,y) = (3x^2, -3y^2)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und damit $g'(0,0) = (0,0)$, so daß g an der Stelle $(0,0)$ nicht regulär ist. Wie in (a) schon begründet, ist M aber natürlich trotzdem eine Mannigfaltigkeit.

Lösung (97.3) (a) Gilt $\operatorname{rk} \varphi'(\xi_0)$, so besitzt die $(n \times d)$-Matrix $\varphi'(\xi_0)$ eine von Null verschiedene $(d \times d)$-Unterdeterminante. Aus Stetigkeitsgründen ist dann auch die aus den gleichen Zeilen gebildete $(d \times d)$-Unterdeterminante von $\varphi'(\xi)$ für alle ξ in einer Umgebung von ξ_0 von Null verschieden. Also gilt $\operatorname{rk} \varphi'(\xi) = d$ für alle ξ in einer Umgebung von ξ_0. Damit ist die Parametrisierung φ in einer Umgebung von ξ_0 regulär; hieraus folgt die Behauptung.

(b) Gilt $\operatorname{rk} g'(x_0) = n - d$, so besitzt die $\big((n-d) \times n\big)$-Matrix $g'(x_0)$ eine von Null verschiedene $\big((n-d) \times (n-d)\big)$-Unterdeterminante. Aus Stetigkeitsgründen ist dann auch die aus den gleichen Spalten gebildete $\big((n-d) \times (n-d)\big)$-Unterdeterminante von $g'(x)$ für alle x in einer Umgebung von x_0 von Null verschieden, so daß $\operatorname{rk} g'(x) = n - d$ für alle x in einer Umgebung von x_0 gilt. Damit ist g in einer ganzen Umgebung von x_0 regulär; hieraus folgt die Behauptung.

Lösung (97.4) (a) In Beispiel (97.1) betrachten wir die Menge

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 y + y^3 - x^2 - y^2 = 0\}.$$

Diese hat an der Stelle $(0,0)$ einen isolierten Punkt, was man sich auch rasch überlegen kann, ohne M geometrisch darzustellen: Für alle hinreichend kleinen Werte ε folgt aus $0 < x^2 + y^2 < \varepsilon$ sofort $x^2 + y^2 > |3x^2 y + y^3|$ (weil für x und y nahe bei Null kubische Terme von quadratischen Termen dominiert werden) und damit $(x,y) \notin M$. Nun ist $M \setminus \{(0,0)\}$ eine eindimensionale Mannigfaltigkeit; wäre ganz M eine Mannigfaltigkeit, so müßte eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ bijektiv auf die offene Umgebung $\{(0,0)\}$ von $(0,0)$ in M abgebildet werden, was natürlich nicht möglichst ist, weil eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ nicht einpunktig sein kann.

(b) In Beispiel (97.2) betrachten wir das kartesische Blatt

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}.$$

Die Menge $M\backslash\{(0,0)\}$ ist eine eindimensionale Mannigfaltigkeit. Wäre ganz M eine Mannigfaltigkeit, so müßte es einen Homöomorphismus zwischen einem offenen Intervall in $\mathbb{R}$ und einer Umgebung von $(0,0)$ in M geben. Das ist aber unmöglich, denn wenn man aus einem offenen Intervall einen Punkt entfernt, so verbleiben zwei Zusammenhangskomponenten, während die Entfernung des Punktes $(0,0)$ aus einer Umgebung von $(0,0)$ in M entweder drei oder vier Zusammenhangskomponenten hinterläßt.

(c) In Beispiel (97.3) betrachten wir die Menge

$$\begin{aligned} M \;:=&\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (y-x^2)^2 - x^5 = 0\} \\ =&\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\, y = x^2(1\pm\sqrt{x})\}. \end{aligned}$$

Wäre M eine Mannigfaltigkeit, so müßte sich die Gleichung $(y-x^2)^2 = x^5$ in einer Umgebung von $(0,0)$ nach x oder y auflösen lassen. Das ist aber schon deswegen nicht möglich, weil in einer genügend kleinen Umgebung von $(0,0)$ nur Punkte im ersten Quadranten ($x\geq 0$, $y\geq 0$) zu M gehören.

(d) In Beispiel (97.4) betrachten wir die Neilsche Parabel

$$M \;:=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^3 = x^2\}.$$

Wäre M eine Mannigfaltigkeit, so müßte sich die Gleichung $y^3 = x^2$ in einer Umgebung von $(0,0)$ durch eine C^1-Funktion nach x oder y auflösen lassen. Eine Auflösung nach x ist nicht möglich, weil $y\geq 0$ für alle $(x,y)\in M$ gilt. Die Auflösung nach y führt zwangsläufig auf $y = x^{2/3}$, und die Funktion $x\mapsto x^{2/3}$ ist im Nullpunkt nicht differentiierbar.

(e) In Beispiel (97.5) betrachten wir die Menge

$$M \;:=\; \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ 2x^2+2y^2-z-1=0 \end{matrix}\right\}.$$

Wie im Buch erläutert, besitzt diese Menge den isolierten Punkt $(0,0,-1)$; wie in Teil (a) folgt hieraus sofort, daß M keine Mannigfaltigkeit sein kann.

(f) In Beispiel (97.6) betrachten wir für eine gegebene Zahl $r>0$ den Horntorus

$$M \;:=\; \{r\begin{bmatrix} (1+\cos v)\cos u \\ (1+\cos v)\sin u \\ \sin v \end{bmatrix} \mid u,v\in\mathbb{R}\}.$$

Wir überlegen, welche Punkte der xy-Ebene in M liegen. Aus $z=0$ folgt $\sin v = 0$, folglich $\cos v = \pm 1$. Ist $\cos v = -1$, so ergibt sich der Punkt $(0,0,0)$; ist $\cos v = 1$, so ergibt sich $(x,y) = (2r\cos u, 2r\sin u)$ und damit $\sqrt{x^2+y^2} = 2r$; innerhalb der offenen Kugel $B_{2r}(0,0,0)$ ist also $(0,0,0)$ der einzige Punkt der xy-Ebene, der zu M gehört. Wäre M eine (notwendigerweise zweidimensionale) Mannigfaltigkeit, so gäbe es eine Kreisscheibe $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$, eine Umgebung $U\subseteq\mathbb{R}^3$ von $(0,0,0)$, die in $B_{2r}(0,0,0)$ enthalten ist, sowie einen Homöomorphismus $\varphi:\Omega\to M\cap U$, der den Mittelpunkt p von Ω auf $\varphi(p) = (0,0,0)$ abbildet. Dann müßte φ aber $\Omega\backslash\{p\}$ homöomorph auf $(M\cap U)\setminus\{(0,0,0)\}$ abbilden. Das ist aber nicht möglich, weil $\Omega\setminus\{p\}$ zusammenhängend ist, während $(M\cap U)\setminus\{(0,0,0)\}$ keinen Punkt der xy-Ebene enthält, also in die zwei offenen Mengen $\{(x,y,z)\in M\cap U \mid z>0\}$ und $\{(x,y,z)\in M\cap U \mid z<0\}$ zerfällt und daher nicht zusammenhängend ist.

Lösung (97.5) (a) Es gilt $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$; dies ist einfach die Normalparabel. Da die Funktion $g(x,y) := x^2 - y$ wegen $g'(x,y) = (2x,-1)\neq(0,0)$ überall regulär ist, liegt eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ vor, also eine Kurve. Die gegebene Parametrisierung $t\mapsto(t^3,t^6)$ ist zwar singulär an der Stelle $t=0$; diese Parametrisierung kann aber ersetzt werden durch die überall reguläre Parametrisierung $\tau\mapsto(\tau,\tau^2)$.

(b) Für $\alpha(t) := (2t^3+t^2,\, t^3-t)$ gilt

$$\dot\alpha(t) \;=\; \begin{bmatrix} 6t^2+2t \\ 3t^2-1 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 2t(3t+1) \\ 3t^2-1 \end{bmatrix} \;\neq\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

die Parametrisierung ist also überall regulär. Um zu zeigen, daß M tatsächlich eine Mannigfaltigkeit ist, müssen wir noch zeigen, daß α injektiv ist (daß also die durch α gegebene Kurve keine mehrfachen Punkte hat). Wir nehmen widerspruchshalber an, es gelte $\alpha(s) = \alpha(t)$ mit $s\neq t$. Dann haben wir $0 = (t^3-t)-(s^3-s) = (t^3-s^3)-(t-s) = (t-s)(t^2+st+s^2-1)$ und $0 = (2t^3+t^2)-(2s^3+s^2) = 2(t^3-s^3)+(t^2-s^2) = (t-s)\big(2(t^2+st+s^2)+t+s\big)$, also $t^2+st+s^2 = 1$ und $0 = 2\cdot 1+t+s$, also $t = -2-s$. Einsetzen der letzten Gleichung in die Gleichung $t^2+st+s^2-1 = 0$ liefert $0 = 4+4s+s^2-2s-s^2+s^2-1 = s^2+2s+3 = (s+1)^2+2$, was nicht erfüllbar ist. Also ist α tatsächlich eine reguläre Einbettung, die Menge $M = \alpha(\mathbb{R})$ daher eine Mannigfaltigkeit.

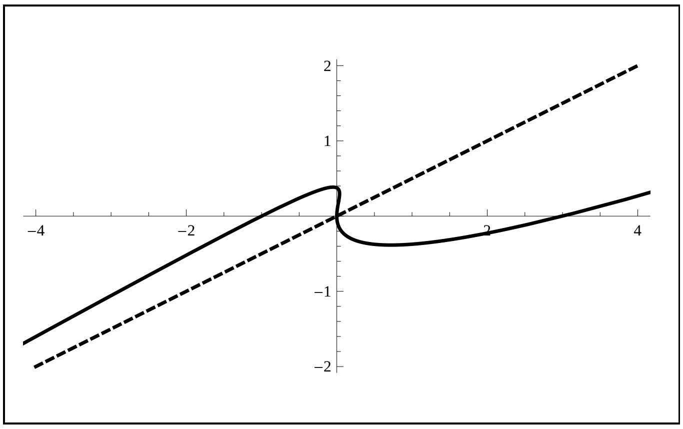


Abb. 97.5b: Kurve $t\mapsto(2t^3+t^2,\, t^3-t)$; gestrichelt die Gerade $y = x/2$, an die sich die Kurve für $t\to\pm\infty$ asymptotisch annähert.

Wir wollen M in Gleichungsform darstellen. Wir können dies mit roher Gewalt tun, indem wir aus den Gleichungen $x = 2t^3+t^2$ und $y = t^3-t$ zunächst t^3 vermöge $x-t^2 = 2t^3 = 2(y+t) = 2y+2t$ elminieren, also $t^2+2t+2y-x = 0$ schreiben, diese Gleichung gemäß $t = -1\pm\sqrt{1+x-2y}$ lösen und dann das Ergebnis in eine der Gleichungen $x = 2t^3 + t^2$ und $y = t^3 - t$ einsetzen. Eleganter können wir folgendermaßen vorgehen: Die Gültigkeit der Gleichungen $y = t^3 - t$ und $x = 2t^3 + t^2$ bzw. $y + t - t^3 = 0$ und $x - t^2 - 2t^3 = 0$ ist äquivalent zum Erfülltsein des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} y & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 & 0 & -1 \\ x & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \\ t^4 \\ t^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit der Koeffizientendeterminante

$$D(x, y) := -3x - 2x^2 + x^3 + 2xy - 6x^2y + 3y^2 + 12xy^2 - 8y^3 .$$

Damit ist M enthalten in der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid D(x, y) = 0\}$. Wir wollen nachprüfen, ob M sogar gleich dieser Menge ist; wir wollen also *alle* Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $D(x, y) = 0$ finden. Da die Abbildung $t \mapsto t^3 - t$ surjektiv ist, können wir immer $y = t^3 - t$ annehmen; wir wissen dann, daß $D(x, t^3 - t)$ durch $x - 2t^3 - t^2$ teilbar sein muß. Ausführung der Division $D(x, t^3 - t) : (x - 2t^3 - t^2)$ liefert

$(\star)$

$$D(x, t^3 - t) = (x - 2t^3 - t^2)\left[\big(x + p(t)\big)^2 + \frac{(3t^2 - 4)(t - 2)^2}{4}\right]$$

mit $p(t) := -2t^3 + (t^2/2) + 3t - 1$. Setzen wir also $x_1(t) := 2t^3 + t^2$ und $x_{2,3}(t) := -p(t) \pm (t - 2)\sqrt{4 - 3t^2}/2$, so erhalten wir die Darstellung

$$D(x, t^3 - t) \;=\; \big(x - x_1(t)\big)\big(x - x_2(t)\big)\big(x - x_3(t)\big),$$

wobei die Funktionen $x_{2,3}$ wegen des Wurzelausdrucks nur für $|t| \leq 2/\sqrt{3}$ definiert sind. Die Nullstellenmenge von D zerfällt also in die drei Kurven $t \mapsto \big(x_i(t), y(t)\big)$ mit $y(t) := t^3 - t$ und $i = 1, 2, 3$. Man kann nun aber nachprüfen, daß die letzten beiden Kurven jeweils nur einen Teil der ersten Kurve parametrisieren, also keine neuen Punkte liefern. (Man sieht dies leicht, wenn man die drei Kurven plotten läßt; das Nachrechnen ist mühsamer.) Dies legt den Schluß nahe, M stimme mit der Nullstellenmenge von D überein. Dieser Schluß ist aber falsch, denn der Punkt $(9, 6)$ ist eine Nullstelle von D, der von der Parametrisierung $t \mapsto (2t^3 + t^2,\ t^3 - t)$ nicht getroffen wird. Wie ging dieser Punkt "verloren"? Auf sehr subtile Weise! Die beiden Funktionen x_2 und x_3 sind nämlich (recht verstanden) auch an der Stelle $t = 2$ definiert, und für $t = 2$ geht $(\star)$ über in $D(x, 6) = (x - 20)(x - 9)^2$. Diese Gleichung wird von $x = 9$ und $x = 20$ gelöst. Der Punkt $(20, 6)$ kommt aber nicht neu hinzu, sondern liegt bereits in M; er wird für $t = 2$ von der Parametrisierung $t \mapsto (2t^3 + t^2,\ t^3 - t)$ erfaßt. Es gilt also

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid D(x, y) = 0\} \;=\; M \cup \{(9, 6)\}$$

(und natürlich ist $(9, 6)$ ein singulärer Punkt der Gleichung $D(x, y) = 0$). Das beobachtete Phänomen ist nicht verständlich, wenn man nur die Situation im Reellen betrachtet. Die beiden Zweige $t \mapsto \big(x_{2,3}(t), y(t)\big)$ verschwinden an den Stellen $|t| = 2/\sqrt{3}$ ins Komplexe (leben also in $\mathbb{C}^2$, nicht in $\mathbb{R}^2$), und diese komplexen Zweige der Kurve berühren den reellen Teil $\mathbb{R}^2$ noch einmal im Punkt $(9, 6)$, der daher im Reellen als isolierter Punkt der Nullstellenmenge von D zum Vorschein kommt.

(c) Es gilt $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\}$. Daß M keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist, wurde bereits in Aufgabe (97.1)(d) gezeigt; wir geben hier eine leicht modifizierte Begründung. Wäre M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, so ließe sich eine Umgebung von $(0, 0) \in M$ parametrisieren durch eine Funktion $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big)$, die mindestens von der Klasse C^1 ist und die Bedingungen $\alpha(0) = 0$ und $\dot\alpha(0) \neq 0$ erfüllt. Wegen $\alpha_2(t) = |\alpha_1(t)|$ hätte dann α_2 an der Stelle $t = 0$ ein Minimum, was $\dot\alpha_2(0) = 0$ und damit $\dot\alpha_1(0) \neq 0$ nach sich zöge. Also hätte α_1 bei $t = 0$ einen Vorzeichenwechsel; o.B.d.A. gelte $\alpha_1(t) > 0$ für $0 < t < \varepsilon$. Dann wäre $0 = \dot\alpha_2(0) = \lim_{t \to 0+} |\alpha_1(t)|/t = \lim_{t \to 0+} \alpha_1(t)/t = \dot\alpha_1(0) \neq 0$, und dies ist ein Widerspruch. Natürlich ist aber $M \setminus \{(0, 0)\}$ eine Mannigfaltigkeit.

(d) Für $\alpha(t) := (t^3 + t^2, t^3 - t + 1)$ erhalten wir

$$\dot\alpha(t) \;=\; \begin{bmatrix} 3t^2 + 2t \\ 3t^2 - 1 \end{bmatrix} \;\neq\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

die Parametrisierung ist also überall regulär. Um zu überprüfen, ob α injektiv ist, fragen wir, ob es $s \neq t$ in $\mathbb{R}$ gibt mit $\alpha(s) = \alpha(t)$. Dies führt auf $0 = t^3 + t^2 - s^3 - s^2 = (t - s)(t^2 + st + s^2 + s + t)$ und $0 = (t^3 - t + 1) - (s^3 - s + 1) = (t - s)(t^2 + st + s^2 - 1)$, also wegen $s \neq t$ auf $t^2 + st + s^2 + s + t = 0$ und $t^2 + st + s^2 = 1$. Einsetzen der zweiten in die erste Gleichung liefert $1 + s + t = 0$, also $s = -t - 1$ und damit $1 = t^2 + st + s^2 = t^2 + t + 1$ bzw. $0 = t^2 + t = t(t + 1)$. Dies führt auf $t = 0$ (und damit $s = -1$) oder $t = -1$ (und damit $s = 0$). Es gilt also $\alpha(0) = \alpha(-1)$; dieser Punkt (nämlich $(0, 1)$) ist also ein Doppelpunkt der Kurve, so daß M keine Mannigfaltigkeit ist. (Allerdings ist $M \setminus \{(0, 1)\}$ eine Mannigfaltigkeit.) Die Umwandlung in Gleichungsform kann wieder mit der Resultantenmethode aus Teil erfolgen, die schon in Teil (b) benutzt wurde.

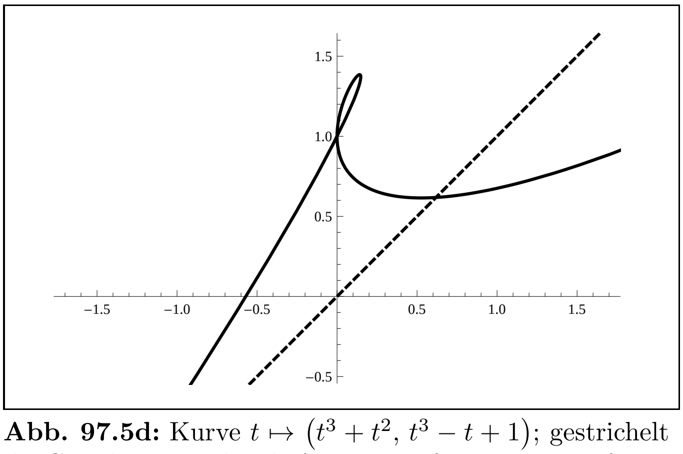


Abb. 97.5d: Kurve $t \mapsto \big(t^3 + t^2,\ t^3 - t + 1\big)$; gestrichelt die Gerade $y = x$, die als Asymptote für $t \to \pm\infty$ auftritt.

(e) Offenbar ist die angegebene Parametrisierung 2π-periodisch; läuft t von 0 bis 2π, so umrundet die Kurve $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ einmal den Nullpunkt, wobei sich der Abstand zum Nullpunkt gemäß $t \mapsto 1 + \cos t$ variiert. Wegen ihres herzförmigen Aussehens bezeichnet man die angegebene Kurve als **Herzkurve** oder **Kardioide**.

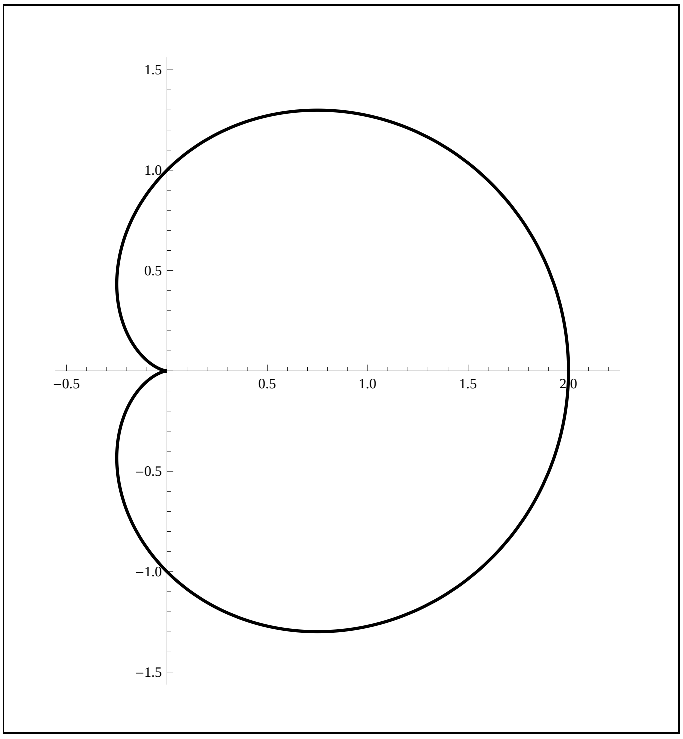


Abb.: Herzkurve (Kardioide).

Für einen Punkt $(x, y) \in M$ erhalten wir $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + \cos t$, also $\cos t = r - 1$ und damit $x = r \cos t = r(r-1) = r^2 - r = x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Jeder Punkt der Kardioide erfüllt also die Gleichung

$$(\star) \qquad \sqrt{x^2 + y^2} \;=\; x^2 + y^2 - x.$$

Wir behaupten, daß umgekehrt jede Lösung (x, y) dieser Gleichung ein Punkt der Kardioide ist. Für $(x, y) = (0, 0)$ ist dies klar. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gibt es eine eindeutige Polarkoordinatendarstellung $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Einsetzen in $(\star)$ liefert dann $r = r^2 - r \cos \varphi$, folglich $1 = r - \cos \varphi$ bzw. $r = 1 + \cos \varphi$ und damit

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;=\; r \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \;=\; (1 + \cos\varphi) \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Die Gleichung $(\star)$ ist äquivalent zu der quadrierten Gleichung $x^2 + y^2 = x^4 + y^4 + x^2 + 2x^2y^2 - 2x^3 - 2xy^2$ bzw.

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^3 - 2xy^2 - y^2 \;=\; 0.$$

(f) Gilt $x = 0$ für einen Punkt $(x, y) \in M$, so gilt $0 = y^3 - y^2 = y^2(y - 1)$, also $y = 0$ oder $y = 1$. Für $x \neq 0$ setzen wir wieder $t = y/x$, also $y = tx$, und erhalten $3tx^3 + t^3x^3 - x^2 - t^2x^2 = 0$ bzw. $(3t + t^3)x = 1 + t^2$. (Hieraus folgt $0 \neq 3t + t^3 = t(3 + t^2)$, also $t \neq 0$.) Wir erhalten damit

$$M = \left\{ \left(\frac{1 + t^2}{3t + t^3}, \frac{1 + t^2}{3 + t^2} \right) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \cup \{(0, 0), (0, 1)\}.$$

Der Punkt $(0, 0)$ ist ein singulärer Punkt der Kurve, denn für (x, y) genügend nahe beim Nullpunkt ist der quadratische Term $x^2 + y^2$ betragsmäßig größer als der kubische Term $3x^2y + y^3$, so daß $3x^2y + y^3 - x^2 - y^2 < 0$ gilt; der Punkt $(0, 1)$ ergibt sich als Grenzwert von $\big(x(t), y(t)\big)$ für $t \to \pm\infty$.

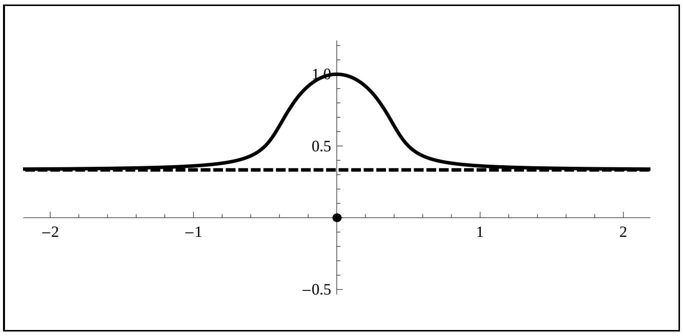


Abb. 97.5f: Lösungsmenge von $3x^2y + y^3 - x^2 - y^2 = 0$.

(g) Für $g(x, y) := x^3 + x^2 - y^2$ erhalten wir $g'(x, y) = (3x^2 + 2x, -2y)$; der einzige kritische Punkt ist $(0, 0)$. Also ist $M \setminus \{(0, 0)\}$ eine eindimensionale Mannigfaltigkeit (also lokal eine "glatte Kurve"). Zum Auffinden einer Parametrisierung machen wir wieder den Ansatz $y = tx$; die Gleichung $y^2 = x^3 + x^2$ geht dann über in $t^2x^2 = x^3 + x^2$, was für $x \neq 0$ gleichbedeutend mit $t^2 = x + 1$ (und $t \neq \pm 1$) ist. Wir erhalten also die Darstellungen $x(t) = t^2 - 1$ und $y(t) = t^3 - t$, die für $t = \pm 1$ den Punkt $(0, 0)$ liefert. Es ergibt sich die Darstellung

$$M \;=\; \{(t^2 - 1, t^3 - t) \mid t \in \mathbb{R}\};$$

die angegebene Parametrisierung ist überall regulär, aber die Abbildung $t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$ ist nicht injektiv und daher keine Einbettungsabbildung. (An der Stelle $(0, 0)$ liegt ein Doppelpunkt der Kurve vor.) Hieraus folgt, daß ganz M (einschließlich des Nullpunktes) keine Mannigfaltigkeit ist, denn sonst müßte es ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, eine offene Umgebung U von $(0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$ und eine injektive C^1-Funktion $\varphi : I \to U$ derart geben, daß $\varphi(I) = M \cap U$ gilt. Das kann aber nicht sein, weil nach Entfernen des Nullpunkts aus der Menge $M \cap U$ entweder drei oder vier Zusammenhangskomponenten übrigbleiben (je nachdem, wie groß U ist), während nach dem Entfernen eines Punktes aus einem offenen Intervall stets zwei Zusammenhangskomponenten verbleiben.

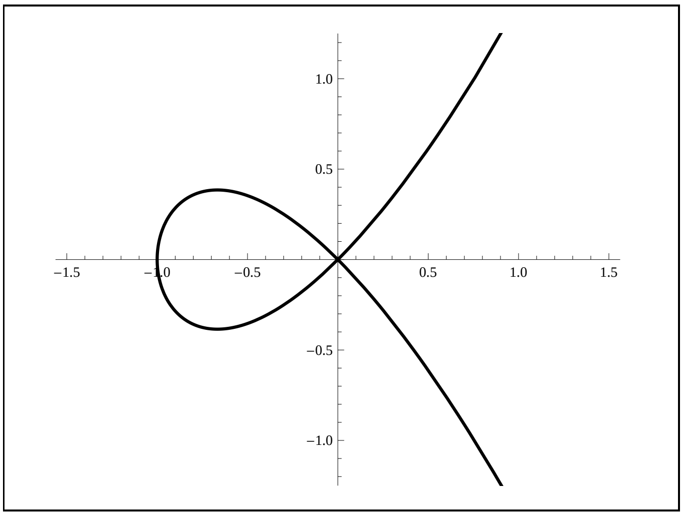


Abb. 97.5g: Darstellung der Kurve $y^2 = x^3 + x^2$.

(h) Gilt $(x,y) \in M$ mit $x=0$, so gilt $y^2+y^4=0$ und damit $(x,y)=(0,0)$. Für $x \neq 0$ machen wir wieder den Ansatz $y = tx$ und erhalten $t^2x^2 - x^4 + t^2x^4 + t^4x^4 = 0$ und damit $t^2 = x^2(1-t^2-t^4)$. Dies kann nur gelten, wenn $t^4+t^2-1<0$ gilt, also $-T<t<T$ mit $T := \sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}$. Wir erhalten also

$$M \;=\; \left\{ \pm\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2-t^4}}, \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2-t^4}} \right) \mid -T<t<T \right\} .$$

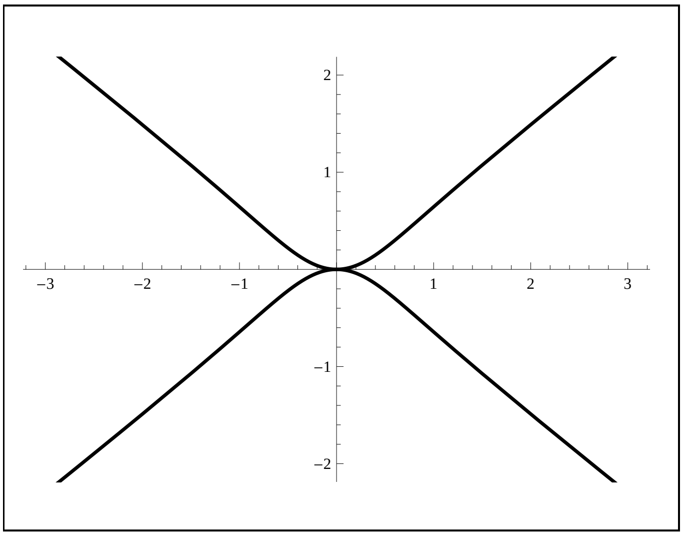


Abb. 97.5h: Lösungsmenge von $y^2 - x^4 + x^2y^2 + y^4 = 0$.

(i) Die Menge M ist definiert als Nullstellenmenge der Funktion

$$\begin{aligned} g(x,y) \;&:=\; (x^2-1)^2 + 2y^2(x^2+1) + y^4 - 1 \\ &=\; x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2y^2 - 2x^2 \\ &=\; (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2). \end{aligned}$$

Es gilt $g'(x,y) = (4x^3+4xy^2-4x, 4y^3+4x^2y+4y) = \big(4x(x^2+y^2-1), 4y(x^2+y^2+1)\big)$; der einzige Punkt $(x,y) \in M$ mit $g'(x,y)=(0,0)$ ist $(x,y)=(0,0)$. Also ist $M \setminus \{(0,0)\}$ eine Mannigfaltigkeit. (Das kann man auch sehen, indem man die Gleichung $g(x,y)=0$, die biquadratisch sowohl in x als auch in y ist, nach x oder y auflöst.)

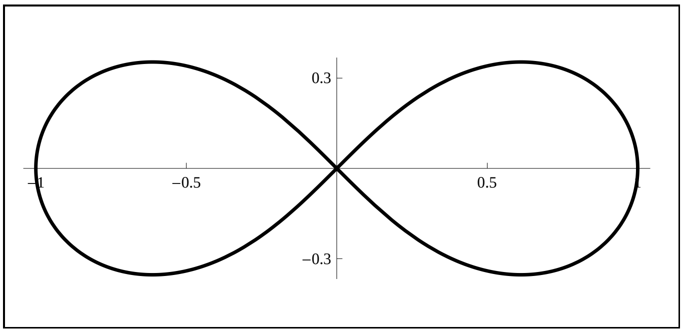


Abb. 97.5i: Lösungsmenge von $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$.

Eine geschicktere Parametrisierung als durch Auflösen nach x oder y erhält man durch Einführen von Polarkoordinaten. Mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ ergibt sich $0 = g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^4 - r^2\cos(2\varphi) = r^2\big(r^2 - \cos(2\varphi)\big)$. Hieraus folgt $r=0$ oder $r^2 = \cos(2\varphi)$. Dies liefert $r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$ und damit die Parametrisierung

$$\begin{aligned} \big(x(\varphi), y(\varphi)\big) \;&=\; \sqrt{\cos(2\varphi)}\big(\cos(\varphi), \sin(\varphi)\big) \\ \text{mit} \quad & \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right]. \end{aligned}$$

Die Menge M selbst ist keine Mannigfaltigkeit, denn ist U eine offene Kreisscheibe vom Radius <1, so kann es kein offenes Intervall I mit regulärer Parametrisierung $\varphi : I \to M \cap U$ geben, wie man wie in Teil (a) der Aufgabe sieht.

(j) Die Menge M ist die Nullstellenmenge von $g(x,y) := 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$; wegen $g'(x,y) = 6\big(x(x-1), y(y+1)\big)$ gilt $g'(x,y) \neq (0,0)$ außer an den Punkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ und $(1,-1)$, von denen aber nur der erste und der letzte die Gleichung $g(x,y)=0$ erfüllen. Damit ist klar, daß $M \setminus \{(0,0),(1,-1)\}$ eine Mannigfaltigkeit ist. Um eine Parametrisierung zu erhalten, machen wir den Ansatz $y = tx$. (Wir fragen also für jeden Steigungswert t nach dem Schnitt der Menge M mit der Geraden $y = tx$.) Einsetzen in die Gleichung $g(x,y)=0$ führt auf

$$0 \;=\; 2x^3 - 3x^2 + 2t^3x^3 + 3t^2x^2 \;=\; x^2\big(2x - 3 + 2t^3x + 3t^2\big)$$

und damit auf $x=0$ oder $(2+2t^3)x = 3-3t^2$. Für $t \neq -1$ erhalten wir hieraus die Parametrisierung

$$\big(x(t), y(t)\big) \;=\; \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1-t^2}{1+t^3}, \frac{t-t^3}{1+t^3} \right).$$

Für $t=-1$ ist die Gleichung identisch erfüllt; das bedeutet, daß jeder Punkt der Form $(x,-x)$ in M enthalten ist. Tatsächlich geht die Polynomdivision $f(x,y) : (x+y)$ ohne Rest auf; wir erhalten

$$g(x,y) \;=\; (y+x)(2y^2 - 2xy + 2x^2 + 3y - 3x).$$

Genau dann gilt also $g(x,y)=0$, wenn $y=-x$ oder aber $2y^2 - 2xy + 2x^2 + 3y - 3x = 0$ gilt. Die letzte Gleichung beschreibt eine Ellipse, wie man durch Hauptachsentransformation sofort sieht. Die Menge M ist also die Vereinigung der Ellipse $2y^2 - 2xy + 2x^2 + 3y - 3x = 0$ und der Geraden $y = -x$. Die Punkte $(0,0)$ und $(1,-1)$, an denen g singulär ist, sind gerade die Schnittpunkte dieser beiden Kurven. Es ist klar, daß keine Umgebung einer dieser beiden Punkte von M homöomorph zu einem reellen Intervall sein kann; man muß also sowohl den Punkt $(0,0)$ als auch den Punkt $(1,-1)$ aus M entfernen, um eine Mannigfaltigkeit zu erhalten.

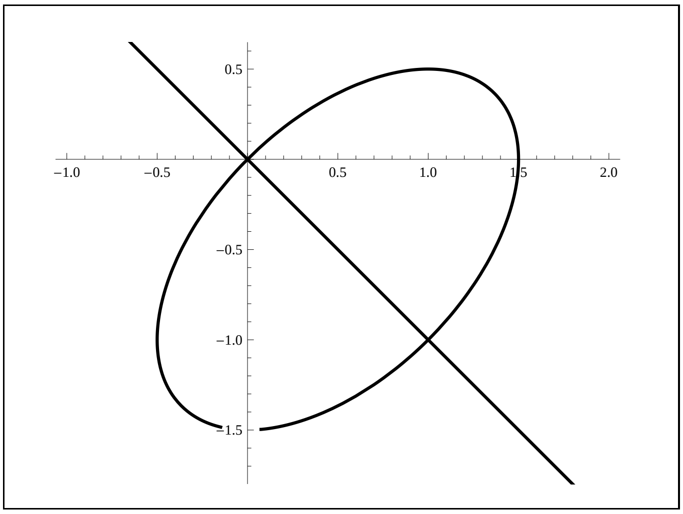


Abb. 97.5j: Lösungsmenge von $2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2 = 0$.

(k) Mit $g(x,y) := x^3 + y^3 - \sqrt{2}$ gilt $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$. Für alle $(x,y) \in M$ gilt $g'(x,y) = (3x^2, 3y^2) \neq (0,0)$; also ist M eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. Anhand der Zeichnung vermutet man, daß sich M als Graph einer Funktion φ darstellen läßt, deren Argument eine entlang der zweiten Winkelhalbierenden gezählte Koordinate ist.

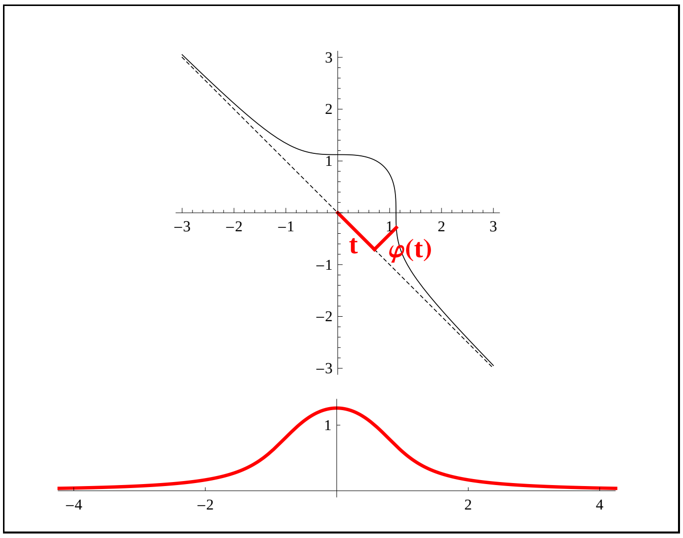


Abb. 97.5k: Lösungsmenge von $x^3 + y^3 = \sqrt[3]{2}$.

Dazu setzen wir

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} + \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

für die gesuchte Funktion φ an. Die Bedingung $\big(x(t), y(t)\big) \in M$ führt auf die Gleichung $4 = \big(t + \varphi(t)\big)^3 + \big(-t + \varphi(t)\big)^3 = 2\varphi(t)^3 + 6t^2\varphi(t)$ bzw. $\varphi(t)^3 - 3t^2\varphi(t) - 2 = 0$. Nach der Cardanischen Formel hat diese Gleichung eine eindeutige reelle Lösung, nämlich

$$\varphi(t) = \sqrt[3]{\sqrt{t^6+1}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{t^6+1}-1}.$$

Der Graph von φ ist im unteren Teil der Abbildung dargestellt. Eine Parametrisierung von M ist dann gegeben durch $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big) = \big((\varphi(t)+t)/\sqrt{2}, (\varphi(t)-t)/\sqrt{2}\big)$.

Lösung (97.6) (a) Für

$$(\star) \qquad \varphi(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u+v \\ uv \\ u^2+v^2 \end{bmatrix}$$

erhalten wir

$$\varphi'(u,v) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ v & u \\ 2u & 2v \end{bmatrix}.$$

Diese Matrix hat den Rang 2 für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ außer für $v = u$; die Teilmenge

$$S := \{\varphi(u,u) \mid u \in \mathbb{R}\} = \{(2u, u^2, 2u^2) \mid u \in \mathbb{R}\}$$

von M besteht also ausschließlich aus singulären Punkten. Da der Rang von $\partial(x,y,z)/\partial(u,v)$ an den Punkten von S gleich 1 ist, erwarten wir dort ein "eindimensionales" Aussehen der Menge M, während $M \setminus S$ eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist. Aus $(\star)$ ergibt sich

$$x^2 - 2y = (u+v)^2 - 2uv = u^2 + v^2 = z,$$

so daß M enthalten ist in der Menge

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - 2y\} =: M'.$$

Allerdings muß M eine echte Teilmenge von M' sein, denn für $g(x,y,z) := x^2 - 2y - z$ hat $g'(x,y,z) = (2x, -2, -1)$ überall den Rang 1, so daß M' eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist. Wir fragen daher, welche Punkt $(x,y,z) \in M'$ in M liegen, sich also in der Form $(\star)$ darstellen lassen. Wir machen den Ansatz $y = uv$ mit $u \neq 0$, setzen also $v := y/u$. Einsetzen in $(\star)$ liefert dann einerseits $x = u + (y/u)$, also $u^2 - xu + y = 0$ und damit $u = (x/2) \pm \sqrt{(x^2/4) - y}$, andererseits $u^2 + (y/u)^2 = z$, also $u^4 - zu^2 + y^2 = 0$ und damit $u^2 = (z/2) \pm \sqrt{(z^2/4) - y^2}$. Eine Darstellung $(\star)$ ist also genau dann möglich, wenn

$$\left(\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - y}\right)^2 = \frac{z}{2} \pm \sqrt{\frac{z^2}{4} - y^2}$$

gilt, d.h., $x^2 - 2y \pm x\sqrt{x^2 - 4y} = z \pm \sqrt{z^2 - 4y}$.

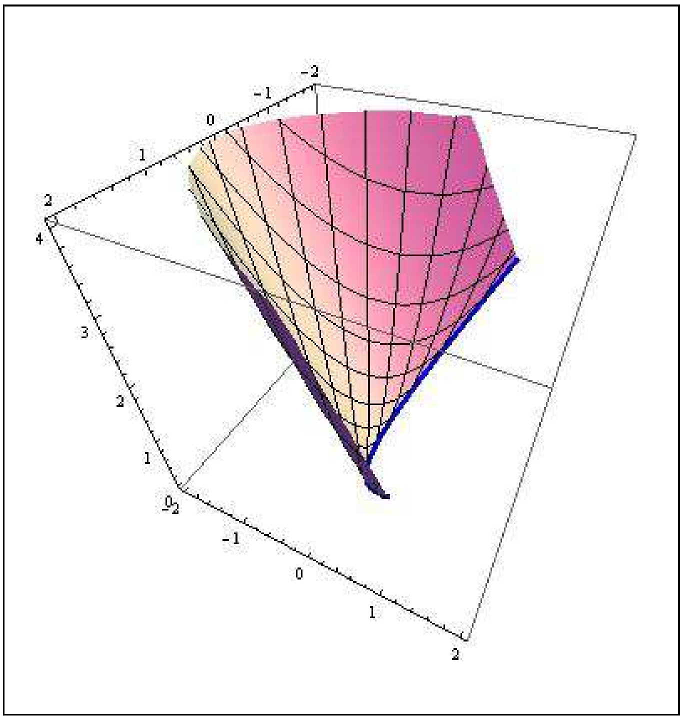


Abb. 97.6a: Parametrisierte Fläche $(u, v) \mapsto (u + v, uv, u^2 + v^2)$.

(b) Für

$$(\star) \qquad \varphi(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^2 - v^2 \\ 2uv \\ u^2 + v^2 \end{bmatrix}$$

erhalten wir

$$\varphi'(u,v) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)} = 2 \begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \\ u & v \end{bmatrix}.$$

Diese Matrix hat überall den Rang 2 außer für $(u, v) = (0, 0)$, was dem Punkt $(0, 0, 0)$ entspricht. Damit ist $M \setminus \{(0, 0, 0)\}$ eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Es ergibt sich

$$x^2 + y^2 = (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 = z^2$$

mit $z = u^2 + v^2 \geq 0$. Die Menge M ist also enthalten in dem Kegel $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$. Wir zeigen, daß nicht nur die Inklusion $M \subseteq K$ gilt, sondern sogar die Gleichheit $M = K$, also

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Dazu geben wir uns einen Punkt $(x, y, z) \in K$ vor. Wir müssen zeigen, daß es $u, v \in \mathbb{R}$ gibt mit $x = u^2 - v^2$ und $y = 2uv$. (Die Gleichung $z = u^2 + v^2$ ist wegen $z \geq 0$ dann automatisch erfüllt.) Ist $y \neq 0$, so muß $u \neq 0$ und damit $v = y/(2u)$ gelten; für u ergibt sich dann die Gleichung $x = u^2 - y^2/(4u^2)$, also $u^4 - xu^2 - (y^2/4) = 0$. Diese Gleichung hat zwei Lösungen, nämlich

$$u_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}.$$

Setzen wir $v_i := y/(2u_i)$, so liefern also die Parameterwerte (u_1, v_1) und (u_2, v_2) die gewünschten Gleichungen. Ist $y = 0$ und $x > 0$, so können wir $u = \pm\sqrt{x}$ und $v = 0$ wählen; ist $y = 0$ und $x < 0$, so können wir $u = 0$ und $v = \pm\sqrt{-x}$ wählen; ist $y = x = 0$, so ist $u = v = 0$ die einzige Möglichkeit. In jedem Fall gibt es also Parameterwerte u, v, die die Gleichungen erfüllen. Damit ist die behauptete Gleichheit bewiesen.

Wir hätten auch statt der ersten beiden Gleichungen $x = u^2 - v^2$ und $y = 2uv$ die erste Gleichung $x = u^2 - v^2$ und die dritte Gleichung $z = u^2 + v^2$ verwenden können, um u und v zu finden. Dies liefert $2u^2 = z + x$ und $2v^2 = z - x$, also $u = \pm\sqrt{(z + x)/2}$ und $v = \pm\sqrt{(z - x)/2}$. Es ergibt sich $2uv = \sqrt{z^2 - x^2} = \sqrt{y^2} = |y|$. Wählen wir also für u und v gleiches Vorzeichen, so wird der Teil $y \geq 0$ der Menge M parametrisiert; wählen wir dagegen für u und v unterschiedliche Vorzeichen, so wird der Teil $y \leq 0$ parametrisiert.

Die Menge M ist also der Graph der Funktion $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; dies ist der senkrechte Kreiskegel mit der Spitze im Nullpunkt, der positiven z-Achse als Symmetrieachse und einem Öffnungswinkel von 45^0. Die Wirkung der Parametrisierung $(u, v) \mapsto (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ wird durch die folgende Abbildung verdeutlicht.

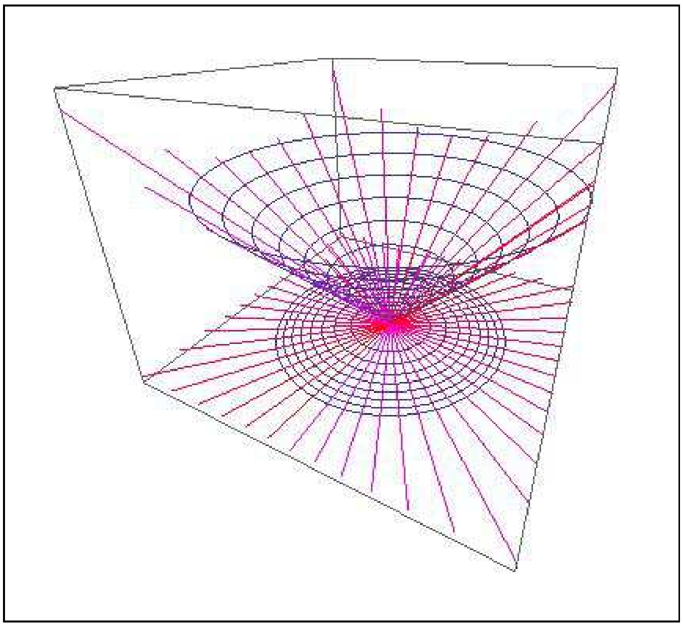


Abb. 97.6b: Parametrisierung des Kegels $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(c) Die Menge M ist die Vereinigung der folgenden paarweise disjunkten Mengen:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{(u + v, u + v, uv) \mid u > 0,\ v > 0\}, \\
M_2 &= \{(u - v, u + v, uv) \mid u > 0,\ v < 0\}, \\
M_3 &= \{(u + v, v - u, uv) \mid u < 0,\ v > 0\}, \\
M_4 &= \{(u - v, v - u, uv) \mid u < 0,\ v < 0\}, \\
S_1 &= \{(t, t, 0) \mid t > 0\}, \\
S_2 &= \{(-v, v, 0) \mid v < 0\}, \\
S_3 &= \{(u, -u, 0) \mid u < 0\}, \\
S_3 &= \{(0, 0, 0)\}.
\end{aligned}$$

Diese Mengen lassen sich folgendermaßen hinschreiben:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x,\ 0 < z \le x^2/4\},\\
M_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 - x^2 = 4z,\ z < 0\},\\
M_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 4z,\ z < 0\},\\
M_4 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -x,\ z > 0\},\\
S_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x,\ z = 0,\ x > 0\},\\
S_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -x,\ z = 0,\ x > 0\},\\
S_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -x,\ z = 0,\ x < 0\},\\
S_4 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = 0\}.
\end{aligned}
$$

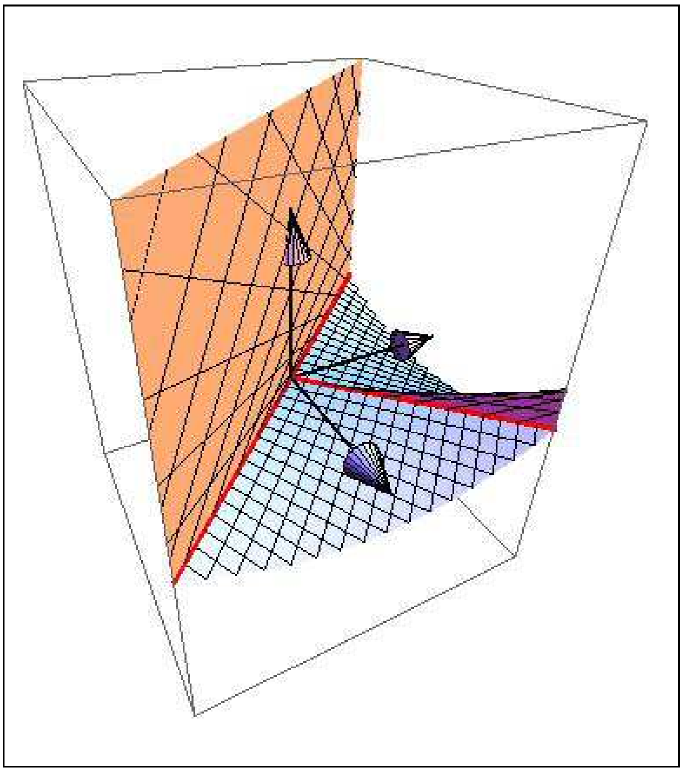


Abb. 97.6c: Abbildung der Fläche $(u,v) \mapsto (u+|v|, |u|+v, uv)$.

Die Menge $\bigcup_{i=1}^4 M_i$ ist eine (aus vier disjunkten Teilen zusammengesetzte) zweidimensionale Mannigfaltigkeit, aber M selbst ist aufgrund der Singularitätenmenge $S := \bigcup_{i=1}^4 S_i$ keine Mannigfaltigkeit. (In keiner Umgebung eines Punktes $p \in S$ besitzt M eine glatte Parametrisierung.)

(d) Es sei $g(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$; dann gilt $g'(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0,0,0)$ für alle $(x,y,z) \in M$. Also ist M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. (Es handelt sich um die Einheitssphäre.) Verschiedene Parametrisierungen sind in Aufgabe (1.4) angegeben, weswegen wir diese hier nicht weiter angeben.

(e) Es ist $M = \{(x, y, \pm\sqrt{x^2+y^2}) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, also die vereinigung der Graphen der Funktionen $z_1(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ und $z_2(x,y) := -\sqrt{x^2+y^2}$. Dies ist ein Doppelkegel, dessen Symmetrieachse die z-Achse und dessen Öffnungswinkel 45^0 ist. Wegen der Singularität an der Stelle $(0,0,0)$ ist M keine Mannigfaltigkeit, aber $M \setminus \{(0,0,0)\}$ ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit (Fläche im Raum.)

(f) Es sei $g(x,y,z) := x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. Man sieht leicht, daß $g(x, y, -x-y) = 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Die Polynomdivision $g(x,y,z) : (z+x+y)$ (etwa bezüglich der Variablen z) muß also ohne Rest aufgehen; wir erhalten

$$
\begin{aligned}
g(x,y,z) &= (z+x+y)\big(z^2 - (x+y)z + (x^2 - xy + y^2)\big)\\
&= (z-x-y)\left(\left(z - \frac{x+y}{2}\right)^2 + \frac{3(x-y)^2}{4}\right).
\end{aligned}
$$

Da $g(x,y,z)$ genau dann Null wird, wenn eine der beiden Klammern am Ende Null wird, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
M &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x-y\} \cup \{(x,y,z) \mid x = y = z\}\\
&= \{(x, y, -x-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(t,t,t) \mid t \in \mathbb{R}\};
\end{aligned}
$$

die Menge M ist also die Vereinigung der Ebene E mit der Gleichung $x+y+z=0$ mit der Geraden $\mathbb{R}(1,1,1)$, die senkrecht zu E verläuft und damit natürlich keine Mannigfaltigkeit. Der Schnittpunkt $(0,0,0)$ der Geraden mit der Ebene ist ein singulärer Punkt von M.

(g) Es sei $g(x,y,z) := x^2 + y^2 + x^2y^2 - xyz$; dann ist $g'(x,y,z) = (2x + 2xy^2 - xz, 2y + 2x^2y - xz, -xy)$. Dieser Vektor ist von Null verschieden für alle $(x,y,z) \in M$ außer für die Punkte der Form $(0,0,z)$, die allesamt singuläre Punkte sind. Die Menge M ist damit die Vereinigung der Fläche

$$
z = \frac{x^2 + y^2 + x^2y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + xy \quad (x, y \neq 0)
$$

und der Geraden $\mathbb{R}(0,0,1)$, also die disjunkte Vereinigung einer ein- und einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit (und damit selbst keine Mannigfaltigkeit).

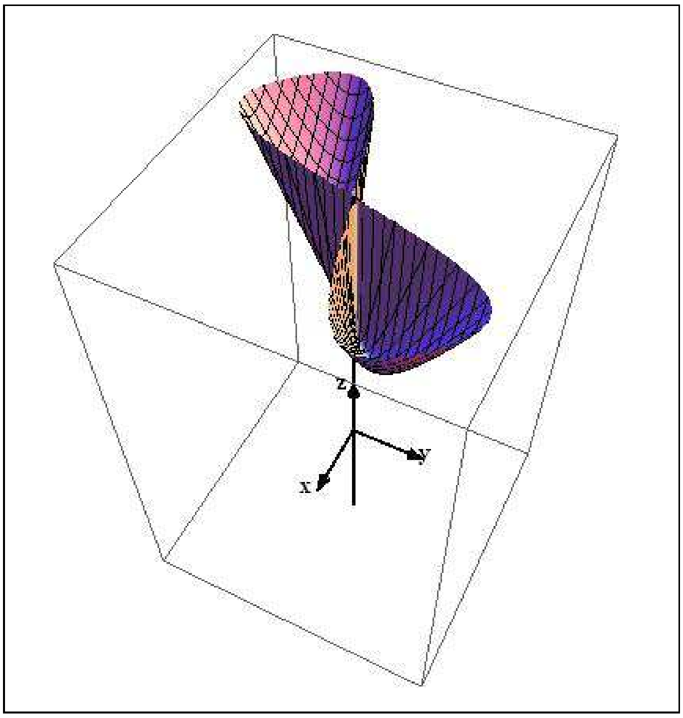


Abb. 97.6g: Lösungsmenge von $x^2 + y^2 + x^2y^2 = xyz$.

(h) Für $g(x,y,z) = x + e^{xy} + zy$ gilt $g'(x,y,z) = (1+ye^{xy},\ z+xe^{xy},\ y)$; diese (1×3)-Matrix hat stets den Rang 1. Gilt $g(x,y,z)=0$ mit $y\neq 0$, so können wir nach z auflösen und erhalten $z = -(x+e^{xy})/y$. Ist $g(x,y,z)=0$ mit $y=0$, so folgt $x=-1$, während z beliebig ist. Also ist M ist die disjunkte Vereinigung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit (nämlich der Fläche $z = -(x+e^{xy})/y$) mit einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit (nämlich der Geraden $\{(-1,0,z) \mid z\in\mathbb{R}\}$; es gilt

$$M \;=\; \left\{ \left(x, y, \frac{-x-e^{xy}}{y} \right) \mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \right\} \cup \{(-1,0,z) \mid z\in\mathbb{R}\}\,.$$

In allen Punkten $(x,y,z)\in M$ mit $y=0$ können wir die Gleichung $g(x,y,z)=0$ nach dem Satz über implizite Funktionen lokal nach x auflösen. Es folgt, daß M eine Mannigfaltigkeit ist.

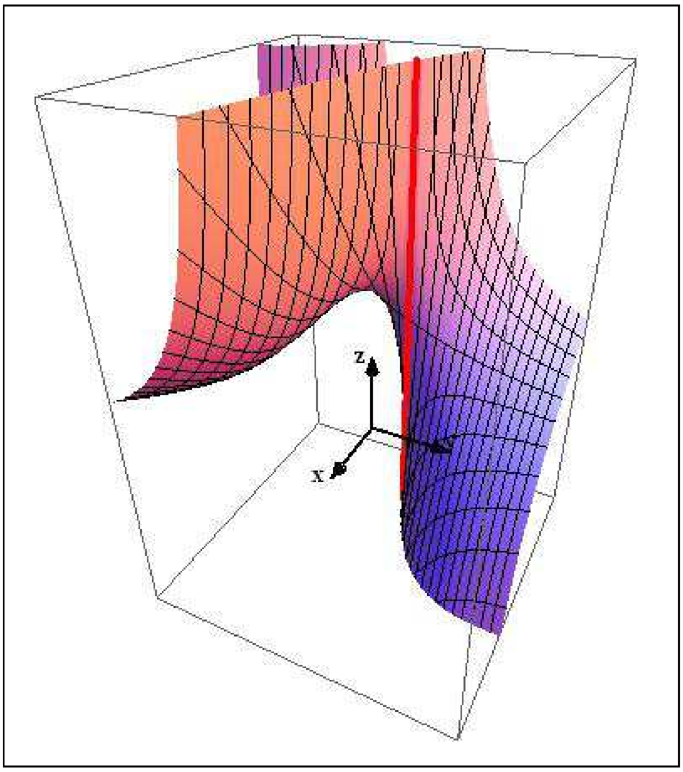


Abb. 97.6h: Lösungsmenge von $x+\exp(xy)+zy=0$.

Lösung (97.7) (a) Für $\varphi(t) := (\cos t, \sin t, t)$ gilt

$$\dot\varphi(t) \;=\; (-\sin t,\, \cos t,\, 1) \;\neq\; (0,0,0)$$

für alle t; ferner ist φ injektiv, da schon die dritte Komponentenfunktion für sich genommen injektiv ist. Also ist φ eine Einbettungsabbildung, die Menge M daher eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ (also eine Raumkurve). Offensichtlich ist M die Schnittmenge der Flächen $x=\cos z$ und $y=\sin z$.

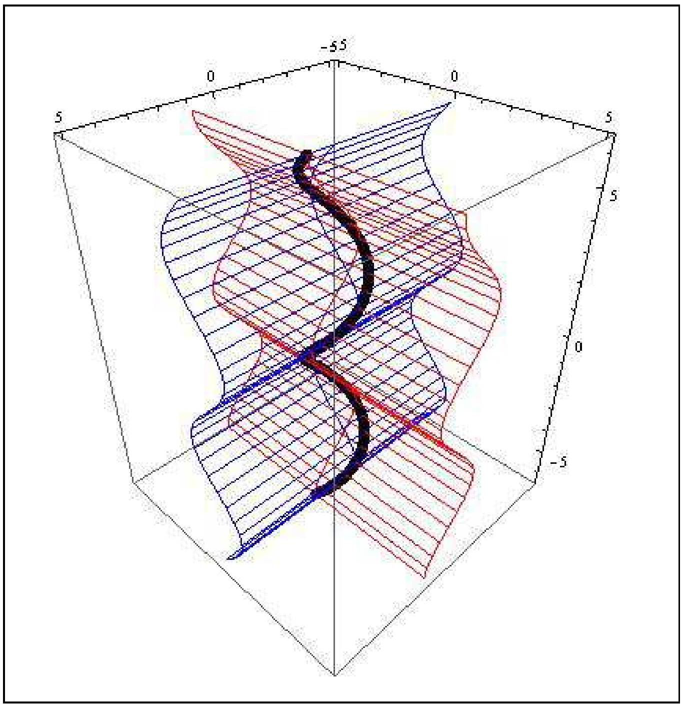


Abb. 97.7a: Schnittkurve zwischen der Fläche $x=\cos z$ (rot) und der Fläche $y=\sin z$ (blau).

(b) Die Funktion $\varphi(t) := (t, t^2, \sqrt{t^2}) = (t, t^2, |t|)$ besitzt keine Ableitung an der Stelle $t=0$. Ähnlich wie in (1.1)(c) folgert man hieraus, daß M wegen des Punktes $\varphi(0)=(0,0,0)$ keine Mannigfaltigkeit ist. Dagegen ist $M\setminus\{(0,0,0)\} = \{\varphi(t) \mid t\neq 0\} = \{(x,x^2,\pm x) \mid x\neq 0\}$ eine Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$.

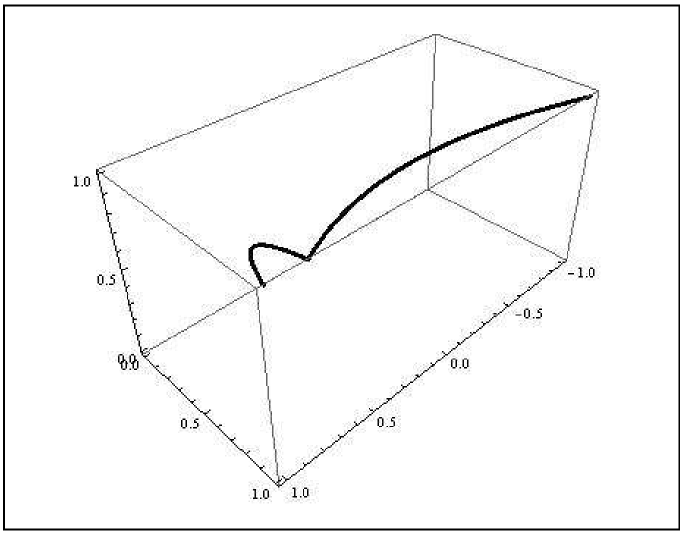


Abb. 97.7b: Kurve $t\mapsto (t,t^2,|t|)$.

(c) Für $\varphi(t) := (t, t^2, \sqrt{t^2+1})$ gilt

$$\varphi'(t) \;=\; \left(1,\, 2t,\, \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right) \;\neq\; (0,0,0);$$

also ist $M = \{\varphi(t) \mid t\in\mathbb{R}\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=x^2, z=\sqrt{x^2+1}\}$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Offensichtlich ist M gerade der Durchschnitt der Flächen $y=x^2$ und $z=\sqrt{x^2+1}$.

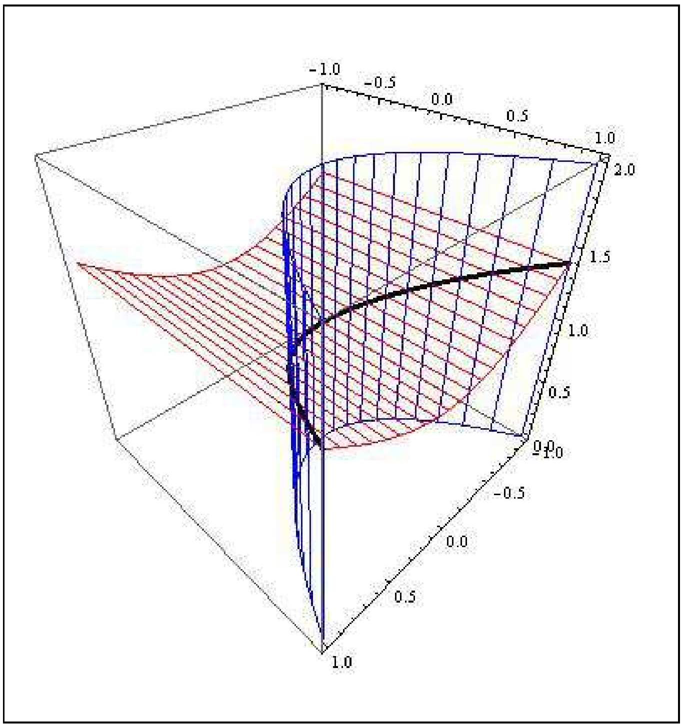


Abb. 97.7c: Kurve $t \mapsto (t, t^2, \sqrt{t^2+1})$ als Durchschnitt der Flächen $y = x^2$ (blau) und $z = \sqrt{x^2+1}$ (rot).

(d) Für $\varphi(t) := (t^2, \cos t, \sin t)$ erhalten wir $\varphi'(t) = (2t, -\sin t, \cos t) \neq (0,0,0)$; also ist $M = \{\varphi(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. In einem Punkt $(x,y,z) \in M$ mit $x > 0$ können wir M lokal als Schnitt der Flächen $y = \cos(\sqrt{x})$ und $z = \sin(\sqrt{x})$ darstellen. Im Punkt $(0,1,0)$ können wir M lokal als Schnitt der Flächen $y = \sqrt{1-z^2}$ und $x = \arcsin(z)^2$ darstellen.

(e) Für $g_1(x,y,z) := x^2 - y$ und $g_2(x,y,z) := x^3 - z$ erhalten wir $g_1'(x,y,z) = (2x, -1, 0)$ und $g_2'(x,y,z) = 3x^2, 0, -1)$; da diese beiden Vektoren überall linear unabhängig sind, ist M eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, also eine räumliche Kurve. Offensichtlich gilt $M = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}$; also ist $\varphi(t) := (t, t^2, t^3)$ eine Parameterdarstellung dieser Raumkurve.

(f) Die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ ist der Doppelkegel $z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$, die Lösungsmenge der Gleichung $ax + by + cz?d$ ist (wenn wir von dem Trivialfall $(a,b,c) = (0,0,0)$ absehen) eine Ebene. Ist $d \neq 0$, so liegt ein Kegelschnitt vor (also eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel oder auch ein Entartungsfall). Ist dagegen $d = 0$, so geht die Ebene durch den Nullpunkt, der gleichzeitig der Scheitelpunkt des Doppelkegels ist. In diesem Fall ist M (je nach dem Schnittwinkel der Ebene $ax + by + cz = 0$ mit der xy-Ebene) entweder die nur aus dem Nullpunkt bestehende Menge $\{(0,0,0)\}$ oder eine Mantellinie des Doppelkegels oder die Vereinigung zweier sich im Nullpunkt kreuzender Geraden.

(g) Da aus $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ schon $(x,y,z) = (0,0,0)$ folgt, ist $M = \{(0,0,0)\}$ die nur den Nullpunkt enthaltende Menge.

(h) Die Menge M ist die Nullstellenmenge der durch

$$g(x,y,z) \;:=\; \begin{bmatrix} x - \sin(yz) \\ y - \cos(xz) \end{bmatrix}$$

definierten Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Wir weisen nach, daß M eine Mannigfaltigkeit ist, indem wir zeigen, daß

$$g'(x,y,z) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & -z\cos(yz) & -y\cos(yz) \\ z\sin(xz) & 1 & x\sin(xz) \end{bmatrix}$$

an jeder Stelle $(x,y,z) \in M$ den Rang 2 hat, daß also jeweils mindestens eine der drei (2×2)-Unterdeterminanten von $g'(x,y,z)$ von Null verschieden ist. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es einen Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{array}{ll} (1) & x \;=\; \sin(yz), \\ (2) & y \;=\; \cos(xz), \\ (3) & 1 + z^2\sin(xz)\cos(yz) \;=\; 0, \\ (4) & \sin(xz)\big(x + yz\cos(yz)\big) \;=\; 0, \\ (5) & \cos(yz)\big(y - xz\sin(xz)\big) \;=\; 0. \end{array}$$

Wegen (3) haben wir $\sin(xz) \neq 0$ und $\cos(yz) \neq 0$; damit gehen (4) und (5) über in

$$\begin{array}{ll} (4') & x + yz\cos(yz) \;=\; 0, \\ (5') & y - xz\sin(xz) \;=\; 0. \end{array}$$

Wegen (3) gelten insbesondere auch die Bedingungen $x \neq 0$ und $z \neq 0$; wegen $(4')$ gilt daher auch $y \neq 0$. Wir können $(4')$ und $(5')$ daher umschreiben als $\cos(yz) = -x/(yz)$ und $\sin(xz) = y/(xz)$ und erhalten unter Benutzung von (1) und (2) dann

$$\begin{array}{ll} (6) & 1 \;=\; \sin^2(yz) + \cos^2(yz) \;=\; x^2 + x^2/(y^2z^2), \\ (7) & 1 \;=\; \cos^2(xz) + \sin^2(xz) \;=\; y^2 + y^2/(x^2z^2). \end{array}$$

Auflösen der beiden letzten Gleichungen (aus denen die Bedingungen $x^2 < 1$ und $y^2 < 1$ folgen) liefert

$$z^2 \;=\; \frac{x^2}{y^2(1-x^2)} \quad \text{und} \quad z^2 \;=\; \frac{y^2}{x^2(1-y^2)}$$

und damit $x^4/(1-x^2) = y^4/(1-y^2)$, also $f(x^2) = f(y^2)$ für die Funktion $f(u) := u^2/(1-u)$. Da (wie eine rudimentäre Kurvendiskussion sofort zeigt) die Einschränkung von f auf das Intervall $[0,1)$ injektiv ist. folgt hieraus $x^2 = y^2$, also $y = \pm x$. Aus (1), (2), $(4')$ und $(5')$ ergeben sich daraus die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} \sin(xz) = \pm x, & \cos(xz) = \pm x, \\ \cos(xz) = \mp 1/z, & \sin(xz) = \pm 1/z \end{array}$$

und damit sowohl $x = 1/z$ als auch $x = -1/z$, was natürlich unmöglich ist. Also gibt es tatsächlich keinen Punkt (x,y,z), der die Bedingungen (1) bis (5) erfüllt, und damit ist M als Mannigfaltigkeit nachgewiesen. Eine explizite Parametrisierung $t \mapsto \varphi(t)$ von M kann man hier nicht angeben; man kann nur den Satz über implizite Funktionen heranziehen, um um jeden Punkt von M lokal die Existenz einer Parametrisierung nachzuweisen.

Lösung (97.8) (a) Da

$$\varphi'(x,y) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \star & \star \end{bmatrix}$$

an jeder Stelle $(x,y) \in U$ den Rang 2 hat, ist φ eine reguläre Parametrisierung; es gilt $\varphi(U) = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1, z > 0\}$. (Dies ist der Teil der Einheitssphäre oberhalb des Äquators.) Die Umkehrabbildung $\psi : \varphi(U) \to U$ ist gegeben durch

$$\psi(x,y,z) \;:=\; (x,y)\,.$$

(b) Da

$$\varphi'(u,v) \;=\; \begin{bmatrix} -\cos(v)\sin(u) & -\sin(v)\cos(u) \\ \cos(v)\cos(u) & -\sin(v)\sin(u) \\ 0 & \cos(v) \end{bmatrix}$$

an jeder Stelle $(u,v) \in U$ den Rang 2 hat, ist φ eine reguläre Parametrisierung; es gilt $\varphi(U) = \mathbb{S}^2 \setminus \{(\cos v, 0, \sin v) \mid -\pi/2 < v < \pi/2\}$. (Dies ist die Sphäre, aus der ein Längenkreis (Meridian) entfernt wurde.) Die Umkehrabbildung $\psi : \varphi(U) \to U$ ist gegeben durch

$$\psi(x,y,z) \;:=\; \{\text{Polarwinkel von } (x,y)^T \in \mathbb{R}^2, \arcsin(z)\}\,.$$

(c) Die Abbildung φ ist dadurch gegeben, daß $\varphi(x,y)$ der Durchstoßpunkt der Geraden durch $(x,y,0)$ und den Nordpol $(0,0,1)$ mit der Sphäre $\mathbb{S}^2$ ist. (Vergleiche Aufgabe (?.?) unten.) Es gilt $\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$; die Abbildung φ parametrisiert also ganz $\mathbb{S}^2$ mit Ausnahme des Nordpols. Die Umkehrabbildung $\psi : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ ist, wie wir in (1.7) etwas allgemeiner herleiten werden, gegeben durch

$$\psi(x,y,z) \;=\; \frac{1}{1-z}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

Eine reguläre Parametrisierung $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $\varphi(U) = \mathbb{S}^2$ (also eine Parametrisierung, die ganz $\mathbb{S}^2$ mit einer einzigen Karte abdeckt), kann es nicht geben, denn $\mathbb{S}^2$ ist eine kompakte Menge, während eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ nicht kompakt ist.

Lösung (97.9) (a) Wir legen ein Koordinatensystem so, daß der Kreis K in der xy-Ebene liegt und den Mittelpunkt $(0,0,0)$ hat. Dieser Kreis bildet die Zentralline des Torus. Die Punkte der Torusfläche sind gegeben durch die Parametrisierung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ 0 \end{bmatrix} + r\,\cos v \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix} + r\,\sin v \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$=\; \begin{bmatrix} R\cos u + r\,\cos v\,\cos u \\ R\sin u + r\,\cos v\,\sin u \\ r\,\sin v \end{bmatrix} \;=:\; \Phi(u,v),$$

wobei $u \in [0,2\pi)$ den Winkel entlang der Zentrallinie des Torus, $v \in [0,2\pi)$ den Winkel innerhalb eines Torusquerschnitts und $r \in [0,R_i]$ den Abstand von der Zentrallinie des Torus bedeutet. Die Ableitungsmatrix ist gegeben durch

$$\Phi'(u,v) \;=\; \begin{bmatrix} -R\sin u - r\cos v\sin u & -r\sin v\cos u \\ R\cos u + r\cos v\cos u & -r\sin v\sin u \\ 0 & r\cos v \end{bmatrix}$$

und hat an jedem Punkt der Torusfläche den Rang 2; also liegt eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ vor.

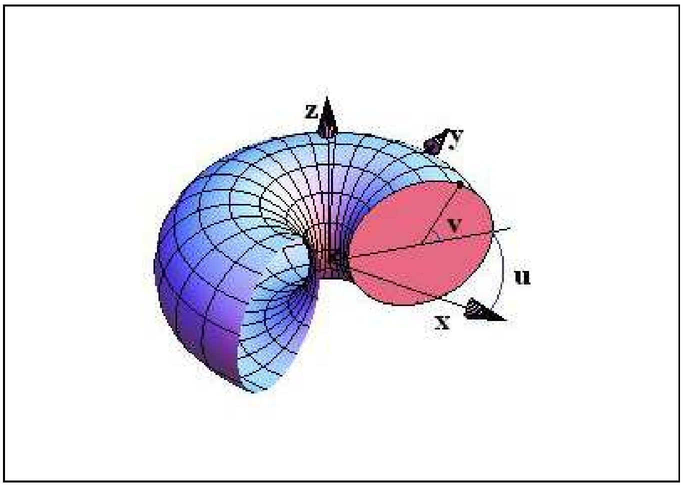


Abb. 97.9a: Definition von Toruskoordinaten.

(b) Ein Punkt (x,y,z) liegt genau dann auf dem Torus T, wenn es Winkel u und v gibt mit $(\star)$, also genau dann, wenn es einen Winkel v gibt mit $x^2+y^2 = (R+r\cos v)^2$ und $z = r\sin v$. Dies ist genau dann der Fall, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (R \pm \sqrt{r^2-z^2})^2 \\ \Leftrightarrow x^2+y^2 &= R^2 \pm 2R\sqrt{r^2-z^2} + r^2 - z^2 \\ \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-R^2-r^2 &= \pm 2R\sqrt{r^2-z^2} \\ \Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2-R^2-r^2)^2 &= 4R^2(r^2-z^2). \end{aligned}$$

Damit ist T die Nullstellenmenge der Funktion

$$g(x,y,z) \;:=\; (x^2+y^2+z^2-R^2-r^2)^2 - 4R^2(r^2-z^2).$$

(c) Offenbar hat die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}) \;\mapsto\; \begin{bmatrix} (R+rc)a \\ (R+rc)b \\ rd \end{bmatrix}$$

die gewünschten Eigenschaften. Die Darstellung des Torus als Produkt $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ zweier Kreise (also als disjunkte Vereinigung $\bigcup_s Q_s$, wobei Q_s den Querschnittskreis an der Stelle s des Zentralkreises bezeichnet) wird in der folgenden Abbildung angedeutet.

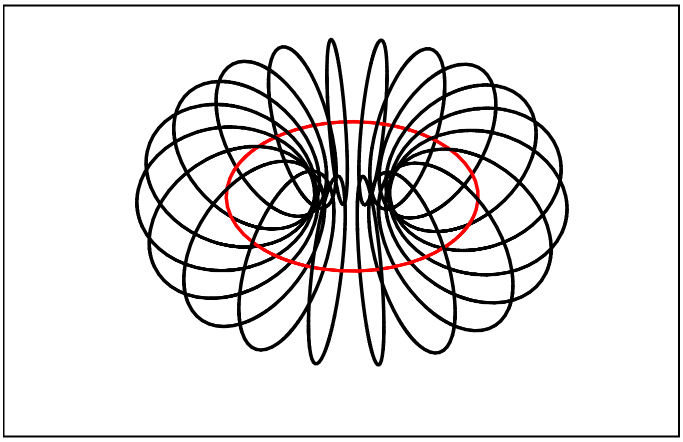


Abb. 97.9b: Darstellung des Torus als direktes Produkt zweier Kreise.

Lösung (97.10) Aus der angegebenen Parameterdarstellung des Horntorus erhalten wir $x^2+y^2 = r^2(1+\cos v)^2$, also $\sqrt{x^2+y^2} = r(1+\cos v)$ bzw. $r\cos v = \sqrt{x^2+y^2}-r$. Andererseits gilt $r\sin v = z$. Hieraus ergibt sich $r^2 = r^2\cos^2 v + r^2\sin^2 v = (\sqrt{x^2+y^2}-r)^2 + z^2 = x^2+y^2-2R\sqrt{x^2+y^2}+r^2+z^2$ bzw.

$$(\star) \qquad x^2+y^2+z^2 \;=\; 2r\sqrt{x^2+y^2}.$$

Der Horntorus ist also enthalten in der Nullstellenmenge der Funktion $g(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-2r\sqrt{x^2+y^2}$. Umgekehrt ist auch jede Nullstelle von g ein Element des Horntorus. Aus $(\star)$ folgt nämlich $(\sqrt{x^2+y^2}-r)^2+z^2 = r^2$, so daß es eine reelle Zahl v gibt mit $\sqrt{x^2+y^2}-r = r\cos v$ und $z = r\sin v$. Es folgt dann $\sqrt{x^2+y^2} = r(1+\cos v) =: \rho$; also gibt es eine reelle Zahl u mit $x = \rho\cos u$ und $y = \rho\sin u$. Genau das war aber zu zeigen.

Lösung (97.11) Wir legen im dreidimensionalen Raum ein kartesisches Koordinatensystem fest und betrachten einen Kreis vom Radius $r>0$ mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ in der xy-Ebene dieses Koordinatensystems. An jedem Punkt $P(u) = (r\cos u, r\sin u, 0)$ dieses Kreises denken wir uns ein Liniensegment $L(u)$ der Läge $\ell < r$ angebracht, das $P(u)$ als Mittelpunkt hat, senkrecht auf der Kreislinie steht und den Winkel $u/2$ mit der Vertikalen bildet. (Deuten wir $u \mapsto L(u)$ als Bewegung eines Stabes, so steht dieser zunächst senkrecht, neigt sich, während sich sein Mittelpunkt entlang des Kreises bewegt, immer mehr der xy-Ebene zu, in der er für $u=\pi$ liegt, und richtet sich dann mit umgekehrter Orientierung wieder auf und erreicht für $u = 2\pi$, also nach einem Umlauf, wieder seine Ausgangsposition, aber mit seinen beiden Enden vertauscht.) Die Menge der Liniensegmente überstreicht eine Fläche, die durch die Parameterdarstellung

$$(u,v) \;\mapsto\; \begin{bmatrix} r\cos u \\ r\sin u \\ 0 \end{bmatrix} + v\cdot \begin{bmatrix} \sin(u/2)\cos u \\ \sin(u/2)\sin u \\ \cos(u/2) \end{bmatrix}$$

$(0 \le u \le 2\pi,\ -\ell/2 \le v \le \ell/2)$ gegeben ist und die man als **Möbiussches Band** bezeichnet. (Ein solches Band kann man sich leicht selbst herstellen, indem man einen Papierstreifen ausschneidet, das eine Ende dann um 180^0 gegen seine natürliche Lage verdreht und die beiden Enden des Streifens dann zusammenklebt.) Dieses Band ist nicht orientierbar; beginnt man an irgendeiner Stelle des Mittelkreises mit einer Basis des Tangentialraums und verschiebt man die Basisvektoren stetig weiter, so hat sich nach einem Umlauf die Orientierung umgekehrt; der durch die jeweilige Basis definierte Normalenvektor zeigt nach einem Umlauf in die entgegengesetzte Richtung. Man kann also nicht zwei Seiten des Möbiusschen Bandes unterscheiden; dieses Band ist eine "einseitige Fläche".

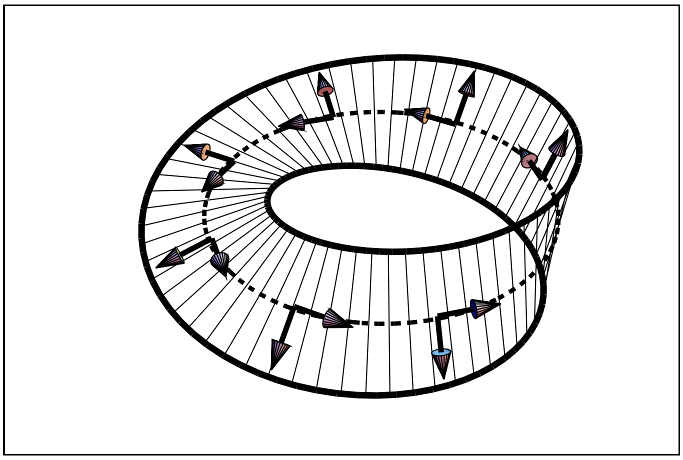


Abb. 97.11: Möbiussches Band.

Lösung (97.12) Es sei

$$(\star) \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \big(R + r\cos(v)\big)\cos(u) \\ \big(R + r\cos(v)\big)\sin(u) \\ r\sin(v)\cos(u/2) \\ r\sin(v)\sin(u/2) \end{bmatrix}$$

ein Element von M_1. Dann gilt $a^2+b^2 = (R+r\cos v)^2$, wegen $R > r$ also $\sqrt{a^2+b^2} = R + r\cos v$ und damit $(\sqrt{a^2+b^2}-R)^2 = r^2\cos^2 v = r^2 - r^2\sin^2 v = r^2-(c^2+d^2)$. Also gilt $g_1(a,b,c,d) = 0$. Weiter gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2acd &= 2(R+r\cos v)\cos(u)\cdot r^2\sin^2 v\cdot \sin(u/2)\cos(u/2) \\ &= r^2(R+r\cos v)\sin^2 v\cdot\cos(u)\sin(u) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b(d^2-c^2) &= (R+r\cos v)\sin(u)\cdot r^2\sin^2 v\left[\sin^2\frac{u}{2} - \cos^2\frac{u}{2}\right] \\ &= -r^2(R+r\cos v)\sin(u)\cdot\sin^2 v\cdot\cos(u), \end{aligned}$$

aus denen die Gleichung $g_2(a,b,c,d) = 0$ folgt. Damit ist die Inklusion $M_1 \subseteq M_2$ gezeigt. Umgekehrt geben wir uns ein Element $(a,b,c,d) \in M_2$ vor. Wegen $(\sqrt{a^2+b^2}-R)^2 + (\sqrt{c^2+d^2})^2 = r^2$ gibt es einen Winkel v mit

$$\sqrt{a^2+b^2} - R = r\cos(v) \quad \text{und} \quad \sqrt{c^2+d^2} = r\sin(v).$$

Wegen $\sqrt{a^2+b^2} = R + r\cos v$ und $\sqrt{c^2+d^2} = r\sin(v)$ gibt es Winkel $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ mit

$$(\star\star) \qquad \begin{aligned} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= (R + r\cos v)\begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \quad \text{und} \\ \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} &= r\sin(v)\begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= 2acd + b(d^2 - c^2) \\ &= r^2(R + r\cos v)\sin^2 v \cdot \sin(\varphi - 2\psi) \end{aligned}$$

und damit $\sin v = 0$ oder $\sin(\varphi - 2\psi) = 0$. Gilt $\sin v = 0$, so wählen wir $u := \varphi$, um aus $(\star\star)$ die gewünschte Darstellung $(\star)$ zu erhalten. Gilt $\sin(\varphi - 2\psi) = 0$, so gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $2\pi = \varphi + k\pi$; setzen wir dann $u := 2\psi$, so gilt $\varphi \equiv 2\psi \equiv u$ modulo 2π, so daß $(\star\star)$ auch in diesem Fall in die gewünschte Darstellung $(\star)$ übergeht. Damit ist auch die Inklusion $M_2 \subseteq M_1$ gezeigt.

Wir suchen nun die singulären Punkte, also diejenigen Elemente $(a,b,c,d) \in M_1 = M_2$, für die die durch

$$2\begin{bmatrix} \dfrac{a(\sqrt{a^2+b^2} - R)}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{b(\sqrt{a^2+b^2} - R)}{\sqrt{a^2+b^2}} & c & d \\ cd & (d^2 - c^2)/2 & ad - bc & ac + bd \end{bmatrix}$$

gegebene Ableitungsmatrix $g'(a,b,c,d)$ nicht den Rang 2 hat. Ist $b \neq 0$, so hat die aus den letzten beiden Spalten bestehende Teilmatrix von $g'(a,b,c,d)$ die Determinante $(2a^2cd/b) + 2bcd = 2cd(a^2+b^2)/b$. Für $cd \neq 0$ ist diese von Null verschieden, so daß (a,b,c,d) ein regulärer Punkt ist. Gilt $cd = 0$, dann wegen $g_2(a,b,c,d) = 0$ auch $c^2 = d^2$ und folglich $c = d = 0$. Da $g'(a,b,0,0)$ den Rang 1, sind die Elemente der Form $(a,b,0,0)$ tatsächlich singuläre Punkte. Ist $b = 0$, so folgt $a \neq 0$ (denn sonst würde wegen $g_1(a,b,c,d) = 0$ die Gleichung $R^2 + c^2 + d^2 = r^2$ gelten, was wegen $R > r$ nicht möglich ist). Wegen $g_2(a,b,c,d) = 0$ gilt dann $cd = 0$. Die aus den letzten beiden Spalten von $g'(a,b,c,d)$ bestehende Untermatrix hat wegen $b = 0$ die Determinante $a(c^2 - d^2)$; gilt also $c^2 \neq d^2$, so ist (a,b,c,d) regulär. Also kann der Punkt (a,b,c,d) auch für $b = 0$ nur singulär sein, wenn $c = d = 0$ ist. Die singulären Punkte sind also diejenigen der Form $(a,b,0,0)$. Die Menge $M_1 = M_2$ wird zu einer Mannigfaltigkeit, wenn man diese singulären Punkte entfernt.

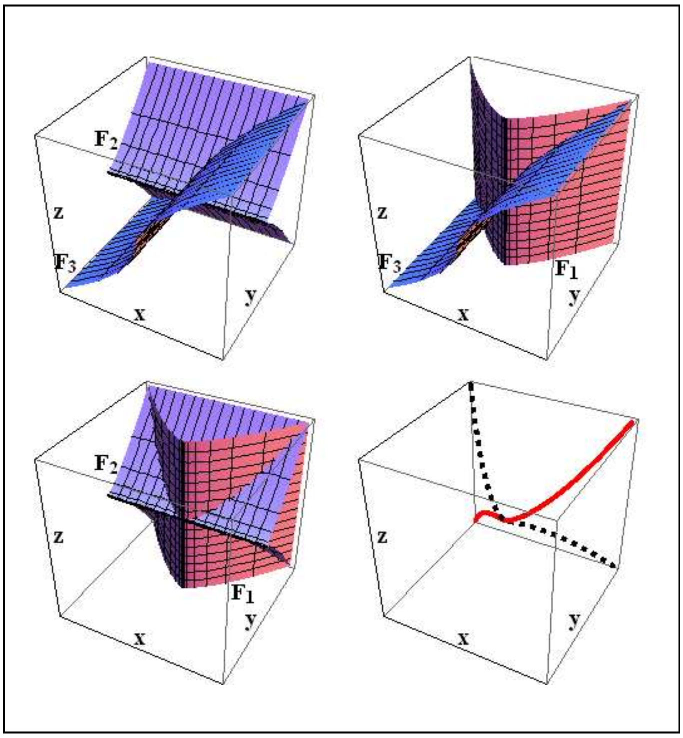
Lösung (97.13) Es gilt $M_1 \subseteq M_2$, denn aus $(x,y,z) = (t^3, t^4, t^5)$ folgen die Gleichungen $x^4 = t^{12} = y^3$, $y^5 = t^{20} = z^4$ und $z^3 = t^{15} = x^5$. Umgekehrt gilt aber auch $M_2 \subseteq M_1$. Zum Nachweis sei $(x,y,z) \in M_2$. Ist $x = 0$, so folgt $(x,y,z) = (0,0,0) = \varphi(0) \in M_1$. Ist $x \neq 0$, so setzen wir $t := y/x$ und erhalten

$$\begin{aligned} t^3 &= y^3/x^3 = x^4/x^3 = x, \\ t^4 &= y^4/x^4 = y^4/y^3 = y, \\ t^5 &= y^5/x^5 = z^4/z^3 = z \end{aligned}$$

und damit $(x,y,z) = (t^3, t^4, t^5) = \varphi(t) \in M_1$. Offensichtlich gilt $M_2 = M_3 \cap M_4 \cap M_5 \subseteq M_i$ für $i = 3,4,5$. Wir behaupten, daß sogar $M_2 = M_3 = M_4$ gilt.

- Ist $(x,y,z) \in M_3$, so haben wir einerseits $z^{12} = (z^4)^3 = (y^5)^3 = (y^3)^5$, andererseits $z^{12} = (z^3)^4 = (x^5)^4 = (x^4)^5$, folglich $(y^3)^5 = (x^4)^5$ und damit $y^3 = x^4$. Damit ist $(x,y,z) \in M_2$ gezeigt.
- Ist $(x,y,z) \in M_4$, so haben wir einerseits $x^{20} = (x^4)^5 = (y^3)^5 = (y^5)^3$, andererseits $x^{20} = (x^5)^4 = (z^3)^4 = (z^4)^3$. folglich $(y^5)^3 = (z^4)^3$ und damit $y^5 = z^4$. Damit ist $(x,y,z) \in M_2$ gezeigt.

Damit ist gezeigt, daß $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 \subseteq M_5$ gilt. Die letzte Inklusion ist echt, denn es gilt $(-1,1,1) \in M_5 \setminus M_4$. Die folgenden Abbildungen verdeutlichen die Situation. Für $i = 1,2,3$ schreiben wir $F_i := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_i(x,y,z) = 0\}$ und haben dann $M_3 = F_2 \cap F_3$ (links oben), $M_4 = F_1 \cap F_3$ (rechts oben) sowie $M_5 = F_1 \cap F_2$ (links unten). Rechts unten ist in rot die Menge $M_1 = \{(t^3, t^4, t^5) \mid t \in \mathbb{R}\}$ eingezeichnet, zusätzlich schwarz gestrichelt die Menge $M_6 := \{t^3, t^4, -t^5) \mid t \in \mathbb{R}\}$; es gilt dann $M_5 = F_1 \cap F_2 = M_1 \cup M_6$.



Die Menge $M_1 \setminus \{(0,0,0)\}$ ist eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Da die gegebene Parametrisierung $\varphi(t) = (t^3, t^4, t^5)$ an der Stelle $t = 0$ eine Singularität hat, ist nicht klar, ob M_1 selbst eine Mannigfaltigkeit ist. Allerdings können wir in einer Umgebung von $(0,0,0)$ die Parametrisierung $x \mapsto \big(x, x^{4/3}, x^{5/3}\big)$ wählen. Damit ist M_1 eine C^1-Mannigfaltigkeit. Allerdings ist M keine C^2-Mannigfaltigkeit, denn man überlegt sich schnell, daß es nicht möglich ist, die Bedingung $(x,y,z) \in M_1$ in einer Umgebung von $(0,0,0)$ als Bedingung $z = f(x,y)$ bzw. $y = f(x,z)$ bzw. $x = f(y,z)$ mit einer C^2-Funktion f zu schreiben.

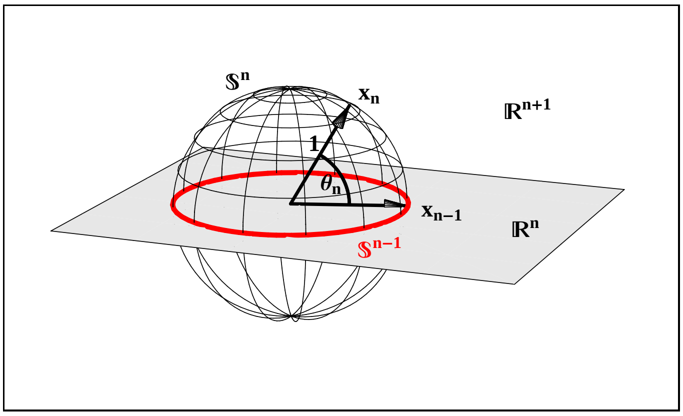
Lösung (97.14) Ab jetzt schreiben wir x_n für die angegebene Abbildung $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$; der Index n bezeichnet also nicht eine Vektorkomponente, sondern die gerade betrachtete Dimension.

(a) Schreiben wir statt $x_n(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ kurz x_n, so lesen wir aus der folgenden Skizze sofort die Rekursionsformel

$$x_n \;=\; \cos(\theta_n) \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \sin(\theta_n) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ab, ausgeschrieben also

$$(\star) \quad x_n(\theta_1, \ldots, \theta_n) \;=\; \begin{bmatrix} \cos(\theta_n)\, x_{n-1}(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) \\ \sin(\theta_n) \end{bmatrix} .$$



Wir erhalten also

$$x_1(\theta_1) := \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{bmatrix}, \quad x_2(\theta_1, \theta_2) := \begin{bmatrix} \cos(\theta_2)\cos(\theta_1) \\ \cos(\theta_2)\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_2) \end{bmatrix},$$

weiter

$$x_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \;=\; \begin{bmatrix} \cos(\theta_3)\cos(\theta_2)\cos(\theta_1) \\ \cos(\theta_3)\cos(\theta_2)\sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_3)\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_3) \end{bmatrix}$$

und schließlich

$$x_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \;=\; \begin{bmatrix} \cos(\theta_4)\cos(\theta_3)\cos(\theta_2)\cos(\theta_1) \\ \cos(\theta_4)\cos(\theta_3)\cos(\theta_2)\sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_4)\cos(\theta_3)\sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_4)\sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_4) \end{bmatrix} .$$

(b) Die Abbildung x_1 ist injektiv auf $[0, 2\pi)$ (oder jedem anderen halboffenen Intervall der Länge 2π). Da der Definitionsbereich einer Parametrisierung offen sein soll, müssen wir x_1 auf ein offenes Intervall der Länge 2π einschränken; dann parametrisiert x_1 den Einheitskreis mit Ausnahme eines Punktes. Die Winkel θ_k für $k > 1$ sind definiert auf dem Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$; allerdings müssen wir die Randpunkte $\pm\pi/2$ (die dem Nord- und dem Südpol von $\mathbb{S}^n$ entsprechen) entfernen, um Injektivitität zu garantieren. Wir erhalten also eine injektive Abbildung

$$x_n : (0, 2\pi) \times \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \times \cdots \times \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \to \mathbb{R}^{n+1},$$

deren Bild die Sphäre $\mathbb{S}^n$ ohne eine halbe Sphäre der Dimension $n-1$ ist. (Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ parametrisieren beispielsweise $\mathbb{S}^2$ ohne einen halben Großkreisbogen vom Nord- zum Südpol.)

(c) Wir schreiben

$$A_{n-1} \;:=\; \frac{\partial x_{n-1}(\theta_1, \ldots, \theta_n)}{\partial(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})} \;\in\; \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$$

und

$$J_n \;:=\; \frac{\partial \Phi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})}{\partial(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})} \;\in\; \mathbb{R}^{n \times n} .$$

Unser Ziel ist es, die Funktionaldeterminante $\det(J_n)$ zu berechnen. Wegen der Gleichung $\Phi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) = r \cdot x_{n-1}(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ gilt die Blockdarstellung

$$J_n \;=\; [x_{n-1} \mid r A_{n-1}] .$$

Ferner gilt wegen Formel $(\star)$ in Teil (a) die Rekursionsformel

$$A_n \;=\; \begin{bmatrix} \cos(\theta_n) A_{n-1} & -\sin(\theta_n) x_{n-1} \\ \mathbf{0} & \cos(\theta_n) \end{bmatrix} .$$

Für $J_{n+1} = [x_n \mid r A_n]$ erhalten wir dann

$$J_{n+1} \;=\; \begin{bmatrix} \cos(\theta_n) x_{n-1} & r\cos(\theta_n) A_{n-1} & -r\sin(\theta_n) x_{n-1} \\ \sin(\theta_n) & \mathbf{0} & r\cos(\theta_n) \end{bmatrix}$$

und durch Entwickeln nach der letzten Zeile folglich

$$\det(J_{n+1}) \;=\; (-1)^{n-1} \sin(\theta_n) \cdot D_1 + r\cos(\theta_n) \cdot D_2$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} D_1 \;:&=\; \det\,[r\cos(\theta_n) A_{n-1} \mid -r\sin(\theta_n) x_{n-1}] \\ &=\; -r\sin(\theta_n)\cos(\theta_n)^{n-1} \det\,[r A_{n-1} \mid x_{n-1}] \\ &=\; (-1)^{n+1} r\sin(\theta_n)\cos(\theta_n)^{n-1} \det\,[x_{n-1} \mid r A_{n-1}] \\ &=\; (-1)^{n+1} r\sin(\theta_n)\cos(\theta_n)^{n-1} \det(J_n) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D_2 \;&:=\; \det\,[\cos(\theta_n) x_{n-1} \mid r\cos(\theta_n) A_{n-1}] \\ &=\; \cos(\theta_n)^n \det\,[x_{n-1} \mid r A_{n-1}] \;=\; \cos(\theta_n)^n \det(J_n). \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} &\det(J_{n+1}) \;=\; (-1)^{n-1} \sin(\theta_n) \cdot D_1 + r\cos(\theta_n) \cdot D_2 \\ &=\; r\sin(\theta_n)^2 \cos(\theta_n)^{n-1} \det(J_n) + r\cos(\theta_n)^{n+1} \det(J_n) \\ &=\; r\cos(\theta_n)^{n-1} (\sin(\theta_n)^2 + \cos(\theta_n)^2) \det(J_n) \\ &=\; r\cos(\theta_n)^{n-1} \det(J_n) \end{aligned}$$

und damit die Rekursionsformel

$$\det(J_{n+1}) \;=\; r\cos(\theta_n)^{n-1} \det(J_n).$$

Ausgehend von

$$\det(J_1) \;=\; \det \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -r\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & r\cos(\theta_1) \end{bmatrix} \;=\; r$$

für ebene Polarkoordinaten erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\det(J_1) = r,\\
&\det(J_2) = r\cos(\theta_2)\cdot\det(J_1) = r^2\cos(\theta_2),\\
&\det(J_3) = r\cos(\theta_3)^2\cdot\det(J_2) = r^3\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)^2,\\
&\det(J_4) = r\cos(\theta_4)^3\cdot\det(J_3) = r^4\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)^2\cos(\theta_4)^3
\end{aligned}$$

und allgemein

$$\det(J_n) \;=\; r^n\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)^2\cdots\cos(\theta_n)^{n-1}.$$

Setzen wir also $r := 1$, so erhalten wir eine reguläre Parametrisierung der Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ durch $n-1$ Winkel. Die Parametrisierung ist regulär auf ganz $\mathbb{S}^{n-1}$ mit Ausnahme eines halben Meridians (also einer Hälfte einer $(n-2)$-dimensionalen Sphäre). (d) Die Verbindungsgerade zwischen den Punkten $(0,1)$ und $(\xi,0)$ hat die Parameterdarstellung

$$\lambda \mapsto \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}\xi\\-1\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}\lambda\xi\\1-\lambda\end{bmatrix}.$$

Die Punkte, an denen diese Gerade die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ schneidet, sind gegeben durch die Parameterwerte λ mit

$$\begin{aligned}
1 \;=\; \left\|\begin{bmatrix}\lambda\xi\\1-\lambda\end{bmatrix}\right\|^2 \;&=\; \lambda^2\|\xi\|^2 + (1-\lambda)^2\\
&=\; \lambda^2(\|\xi\|^2+1) + 1 - 2\lambda
\end{aligned}$$

und damit $\lambda^2(1+\|\xi\|^2) = 2\lambda$. Eine Lösung ist selbstverständlich $\lambda = 0$ (dieser Parameterwert liefert den Nordpol der Sphäre); der andere ist gegeben durch $\lambda = 2/(1+\|\xi\|^2)$. Eine Bijektion $p:\mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^{n-1}\setminus\{N\}$ ist also gegeben durch

$$p(\xi) \;=\; \frac{1}{\|\xi\|^2+1}\begin{bmatrix}2\xi\\\|\xi\|^2-1\end{bmatrix}.$$

Die Umkehrabbildung p^{-1} ist dadurch gegeben, daß $p^{-1}(x)$ der Durchstoßpunkt der Verbindungsgeraden von $(0,1)$ und x mit der Hyperebene $\mathbb{R}^n\times\{0\}$ ist. Schreiben wir $n := (0,1)$ und $x = (\widehat{x}, x_{n+1})$ mit $\widehat{x}\in\mathbb{R}^n$, so ist die definierende Bedingung gegeben durch

$$\begin{bmatrix}p^{-1}(x)\\0\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}\widehat{x}\\x_{n+1}-1\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}\lambda\widehat{x}\\1+\lambda(x_{n+1}-1)\end{bmatrix}.$$

Der letzten Komponente entnehmen wir $\lambda = 1 - x_{n+1}$; es ergibt sich dann

$$p^{-1}(x) \;=\; \frac{1}{1-x_{n+1}}\widehat{x} \;=\; \frac{1}{1-x_{n+1}}\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

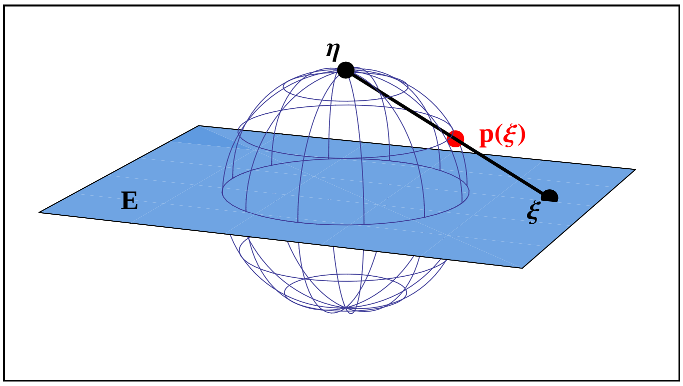


Abb. 97.14: Stereographische Projektion $p:\mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^{n-1}\setminus\{N\}$.

Lösung (97.15) (a) Weil $A\in\mathbb{R}^{n\times k}$ den gleichen Rang hat wie $A^TA\in\mathbb{R}^{k\times k}$ und weil eine $(k\times k)$-Matrix genau dann den Rang k hat, wenn ihre Determinante nicht verschwindet, gilt

$$\Sigma_{n,k} \;=\; \{A\in\mathbb{R}^{n\times k} \mid \det(A^TA)\neq 0\}.$$

Als Urbild der offenen Menge $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ unter der stetigen Abbildung $A\mapsto\det(A^TA)$ ist damit $\Sigma_{n,k}$ offen in $\mathbb{R}^{n\times k}$.

(b) Wir identifizieren $\mathbb{R}^{n\times k}$ mit $(\mathbb{R}^n)^k = \mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n$, indem wir eine $(n\times k)$-Matrix mit dem k-Tupel ihrer Spalten identifizieren. Dann ist die Menge $S_{n,k}$ ist die gemeinsame Nullstellenmenge der Funktionen $g_{ij}:\mathbb{R}^{n\times k}\to\mathbb{R}$ mit

$$g_{ij}(v_1,\ldots,v_n) \;:=\; \langle v_i, v_j\rangle$$

für $1\le i\le j\le k$. Wir behaupten, daß diese Funktionen auf ganz $S_{n,k}$ linear unabhängig sind. Es gilt

$$(\nabla g_{ij})(v_1,\ldots,v_n) \;=\; \begin{bmatrix}\delta_{i1}v_j+\delta_{j1}v_i\\\delta_{i2}v_j+\delta_{j2}v_i\\\vdots\\\delta_{in}v_j+\delta_{jn}v_i\end{bmatrix}.$$

Wir wollen die lineare Unabhängigkeit dieser Gradienten zeigen, aus der Bedingung

$$(\star)\qquad \sum_{1\le i\le j\le k} c_{ij}(\nabla g_{ij})(v_1,\ldots,v_n) \;=\; 0$$

also $c_{ij}=0$ für alle (i,j) folgern. Gilt $(\star)$, so folgt für alle Indices $1\le r\le k$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \sum_{1\le i\le j\le k} c_{ij}(\delta_{ir}v_j+\delta_{jr}v_i)\\
&=\; \sum_{r\le j} c_{rj}v_j + \sum_{i\le r} c_{ir}v_i\\
&=\; \sum_{r<j} c_{rj}v_j + 2c_{rr}v_r + \sum_{i<r} c_{ir}v_i.
\end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren v_i folgt hieraus, daß alle Koeffizienten c_{rj} mit $r\le j$ und c_{ir} mit

$i \le r$ verschwinden. Damit ist gezeigt, daß $S_{n,k}$ eine Mannigfaltigkeit ist.

Die Anzahl der Funktionen g_{ij} ist die Anzahl der möglichen Paare (i,j) von Indices mit $1 \le i \le j \le k$. Die Anzahl der Paare (i,j) mit $1 \le i < j \le k$ ist genau die Anzahl der zweielementigen Teilmengen einer k-elementigen Menge, also $\binom{k}{2} = k(k-1)/2$. Hinzu kommen die Paare (i,i), deren es k gibt; die Anzahl der Funktionen g_{ij} ist also $k + k(k-1)/2 = k(k+1)/2$. Also gilt

$$\dim S_{n,k} \;=\; nk - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Etwas salopper kann man folgendermaßen argumentieren: Die Menge $S_{n,k}$ besteht aus allen $(n \times k)$-Matrizen, deren Spalten ein Orthonormalsystem bilden. Die möglichen ersten Spalten durchlaufen gerade die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$, und diese hat die Dimension $n-1$. Ist die erste Spalte gewählt, so bleiben für die zweite Spalte alle Vektoren der Einheitssphäre im Lotraum der ersten Spalte; diese Sphäre hat die Dimension $n-2$. Analog kann man für alle weiteren Spalten argumentieren (bei jeder Spalte sinkt die Dimension um 1). Als Dimension von $S_{n,k}$ ergibt sich daher

$$\begin{aligned} &(n-1) + (n-2) + \cdots + (n-k) \\ &= k \cdot n - (1 + 2 + \cdots + k) \\ &= k \cdot n - k(k+1)/2. \end{aligned}$$

(c) Genau dann gilt $A \in S_{n,k}$, wenn die Spalten $(v_1, \ldots, v_k)$ ein Orthonormalsystem aus k Vektoren bilden, also ein k-Bein.

Lösung (97.16) (a) Da die Matrizenmultiplikation assoziativ ist, müssen wir nur zeigen, daß $\mathrm{O}(n)$ das Neutralelement $\mathbf{1}$ (also die Einheitsmatrix) enthält und abgeschlossen ist unter Inversenbildung und Multiplikation. Gilt $A \in \mathrm{O}(n)$, also $A^T A = \mathbf{1}$ bzw. $A^T = A^{-1}$, dann auch $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$ und damit $A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$. Liegen A und B in $\mathrm{O}(n)$, gelten also die Gleichungen $A^T = A^{-1}$ und $B^T = B^{-1}$, so gilt auch $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ und damit $AB \in \mathrm{O}(n)$. Damit ist $\mathrm{O}(n)$ eine Gruppe im algebraischen Sinn.

(b) Es gilt $\mathrm{O}(n) = S_{n,n}$; dies ist nach der vorigen Aufgabe eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$. Die Dimension ist

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \;=\; \frac{2n^2 - (n^2+n)}{2} \;=\; \frac{n^2-n}{2} \;=\; \frac{n(n-1)}{2}.$$

(c) Wegen $\det(\mathbf{1}) = 1$ liegt $\mathbf{1}$ in $\mathrm{SO}(n)$. Liegt A in $\mathrm{SO}(n)$, dann wegen $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = 1^{-1} = 1$ auch A^{-1}. Liegen A und B in $\mathrm{SO}(n)$, dann wegen $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 1 \cdot 1 = 1$ auch AB. Also ist $\mathrm{SO}(n)$ eine Untergruppe von $\mathrm{O}(n)$. Ist $\sigma \in \mathrm{O}(n) \setminus \mathrm{SO}(n)$ beliebig, so gilt

$$\mathrm{O(n)} \;=\; \mathrm{SO}(n) \cup \sigma\mathrm{SO}(n)$$

als disjunkte Vereinigung, denn ist $A \in \mathrm{O}(n)$ beliebig, so gilt $1 = \det(\mathbf{1}) = \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2$ und damit $\det(A) = \pm 1$. Gilt $\det(A) = 1$, so liegt A in $\mathrm{SO}(n)$. Gilt dagegen $\det(A) = -1$, so gilt $\det(\sigma^{-1}A) = \det(\sigma)^{-1}\det(A) = (-1)\cdot(-1) = 1$ und damit $\sigma^{-1}A \in \mathrm{SO}(n)$, also $A \in \sigma\mathrm{SO}(n)$.

Lösung (97.17) Es sei $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ beliebig. Dann gibt es offene Mengen $U_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ und $U_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ sowie $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^{d_1}$ und $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$ und lokale C^k-Parametrisierungen $\varphi_1 : \Omega_1 \to U_1$ und $\varphi_2 : \Omega_2 \to U_2$ mit $M_1 \cap U_1 = \varphi_1(\Omega_1)$ und $M_2 \cap U_2 = \varphi_2(\Omega_2)$. Definieren wir nun $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ durch

$$\varphi(u_1, u_2) \;:=\; \big(\varphi_1(u_1), \varphi_2(u_2)\big),$$

so ist $(M_1 \times M_2) \cap (U_1 \cap U_2) = (M_1 \cap U_1) \times (M_2 \cap U_2) = \varphi_1(\Omega_1) \times \varphi_2(\Omega_2) = \varphi(\Omega_1 \times \Omega_2)$, und φ ist wieder von der Klasse C^k mit $\operatorname{rk} \varphi'(u_1,u_2) = \operatorname{rk} \varphi_1'(u_1) + \operatorname{rk} \varphi_2'(u_2) = d_1 + d_2$. Also ist φ eine lokale C^k-Parametrisierung von $M_1 \times M_2$ um (x_1, x_2).

Statt mit Parametrisierungen können wir auch mit Gleichungsdarstellungen argumentieren. Wieder sei $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ beliebig vorgegeben. Da M_1 und M_2 Mannigfaltigkeiten sind, gibt es offene Umgebungen $U_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ von x_1 sowie $U_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ von x_2 sowie C^k-Funktionen $g_1 : U_1 \to \mathbb{R}^{n_1 - d_1}$ und $g_2 : U_2 \to \mathbb{R}^{n_2-d_2}$ mit $M_1 \cap U_1 = \{x_1 \in U_1 \mid g_1(x_1) = 0\}$ und $M_2 \cap U_2 = \{x_2 \in U_2 \mid g_2(x_2) = 0\}$. Definieren wir nun $U := U_1 \times U_2$ und $g : U \to \mathbb{R}^{n_1-d_1} \times \mathbb{R}^{n_2-d_2} = \mathbb{R}^{(n_1+n_2)-(d_1+d_2)}$ durch

$$g(x_1, x_2) \;=\; \big(g_1(x_1), g_2(x_2)\big),$$

so ist g wieder von der Klasse C^k mit $\operatorname{rk} g'(x_1, x_2) = \operatorname{rk} g'(x_1) + \operatorname{rk} g_2'(x_2)$, und es gilt $(M_1 \times M_2) \cap U = \{(x_1, x_2) \in U \mid g(x_1, x_2) = 0\}$.

Lösung (97.18) (a) Die Gradienten von g_1 und g_2 sind gegeben durch

$$(\nabla g_1)(x) = \begin{bmatrix} x_4 \\ -x_3 \\ -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (\nabla g_2)(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, daß $(\nabla g_1)(x)$ und $(\nabla g_2)(x)$ an jeder Stelle $x \in M$ linear unabhängig sind. Wäre $(\nabla g_1)(x) = \lambda(\nabla g_2)(x)$ für ein $x \in M$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so hätten wir

$$\begin{aligned} g_1(x) \;&=\; x_1x_4 - x_2x_3 - 1 \\ &= \lambda(x_1x_3 + x_2x_4) - 1 \;=\; \lambda g_2(x) - 1, \end{aligned}$$

was wegen $g_1(x) = g_2(x) = 0$ unmöglich ist. Analog können wir zeigen, daß die Gleichung $(\nabla g_2)(x) = \mu(\nabla g_1)(x)$ nicht für $x \in M$ und $\mu \in \mathbb{R}$ gelten kann. Dies zeigt, daß $(\nabla g_1)(x)$ und $(\nabla g_2)(x)$ an jeder Stelle $x \in M$ linear unabhängig sind.

(b) Die Gleichung $g_1(x) = g_2(x) = 0$ läßt sich umschreiben als

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bzw. äquivalent dazu in der Form

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

(Beachte, daß $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ gelten muß, denn sonst hätten wir $x_1 = x_2 = 0$ im Widerspruch zu der Gleichung $x_1 x_4 - x_2 x_3 = 1$.) Also gilt

$$M = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \mid x_3 = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, x_4 = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \},$$

so daß M der Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ ist, die gegeben ist durch

$$f(x_1, x_2) := \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right).$$

(c) Der Normalraum von M in p ist

$$N_p M = \mathbb{R}(\nabla g_1)(p) + \mathbb{R}(\nabla g_2)(p) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Der Tangentialraum ist daher

$$T_p M = (N_p M)^{\perp} = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$