L96: Umkehrsatz und implizite Funktionen

Lösung (96.1) Wir schreiben $u := xe^y + y$ und $v := xe^y - y$ und versuchen, diese beiden Gleichungen nach x und y aufzulösen. Subtraktion beider Gleichungen liefert $u - v = 2y$ und damit $y = (u-v)/2$; es folgt $x = (u-y)e^{-y} = \big((u+v)/2\big)\cdot e^{(v-u)/2}$. Die Auflösung ist also für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ eindeutig möglich; daher ist f invertierbar mit der Umkehrfunktion

$$f^{-1}(u,v) \;=\; \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (u+v)e^{(v-u)/2} \\ u-v \end{bmatrix}.$$

Da diese Abbildung von der Klasse C^∞ (ja sogar analytisch) ist, ist f ein C^∞-Diffeomorphismus.

Lösung (96.2) Wir schreiben

$$u = \frac{x}{2+y^2} + ye^z, \quad v = \frac{x}{2+y^2} - ye^z + z, \quad w = 2ye^z + z$$

und versuchen, diese drei Gleichungen nach x, y und z aufzulösen. Wir erhalten zunächst $u - v = 2ye^z - z$ und dann $w - (u-v) = 2z$, also

$$z \;=\; \frac{w+v-u}{2} \;=:\; f_3(u,v,w).$$

Aus der Gleichung $u - v = 2ye^z - z$ folgt dann $2y = (u-v+z)e^{-z}$, also

$$y \;=\; \frac{1}{2}\big(u - v + f_3(u,v,w)\big)e^{-f_3(u,v,w)} \;=:\; f_2(u,v,w).$$

Setzen wir die gefundenen Ausdrücke für z und y in die Gleichung $x = (u - ye^z)\cdot(2+y^2)$ ein, so ergibt sich

$$x = \big(u - f_2(u,v,w)e^{f_3(u,v,w)}\big)\cdot\big(2 + f_2(u,v,w)^2\big) =: f_1(u,v,w).$$

Also lassen sich x, y und z in eindeutiger Weise als analytische Funktionen von u, v und w darstellen; hieraus folgt die Behauptung.

Lösung (96.3) Offensichtlich gilt $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ erhalten wir

$$f'(x,y) \;=\; \begin{bmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) \\ e^x\sin(y) & e^x\cos(y) \end{bmatrix}$$

und damit $\det\big(f'(x,y)\big) = e^{2x} > 0$. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist f daher an jeder Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ein Diffeomorphismus zwischen einer Umgebung von (x,y) und einer Umgebung von $f(x,y)$. Andererseits gilt $f(x, y+2\pi) = f(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, so daß f nicht injektiv und damit insbesondere kein Diffeomorphismus ist.

Lösung (96.4) (a) Da der Arcustangens nur Werte zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ annimmt, kann die angegebene Funktion nur Polarwinkel zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ wiedergeben, also in der offenen rechten Halbebene $x > 0$. Umgekehrt folgt für $x > 0$ aus der Gleichung $\tan(\varphi) = y/x$ auch tatsächlich $\varphi = \arctan(y/x)$. Also definiert g einen Diffeomorphismus von $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ auf $V := (0,\infty) \times (-\pi/2, \pi/2)$, der f umkehrt.

(b) Da der Arcuscosinus nur Werte zwischen 0 und π annimmt, kann die angegebene Funktion nur Polarwinkel zwischen 0 und π wiedergeben, also in der offenen oberen Halbebene $y > 0$. Umgekehrt folgt für $y > 0$ aus der Gleichung $\cos(\varphi) = x/r$ mit $r := \sqrt{x^2+y^2}$ auch tatsächlich $\varphi = \arccos(x/r)$. Also definiert g einen Diffeomorphismus von $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ auf $V := (0,\infty) \times (0,\pi)$ und ist dort eine Umkehrfunktion zu f.

(c) Da der Arcussinus nur Werte zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ annimmt, kann die angegebene Funktion nur Polarwinkel zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ wiedergeben, also in der offenen rechten Halbebene $x > 0$. Umgekehrt folgt für $x > 0$ aus der Gleichung $\sin(\varphi) = y/r$ mit $r := \sqrt{x^2+y^2}$ auch tatsächlich $\varphi = \arcsin(y/r)$. Also definiert g einen Diffeomorphismus von $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ auf $V := (0,\infty) \times (-\pi/2, \pi/2)$, der f umkehrt.

(d) Aus $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi + r} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} \\ &= \frac{\sin(2\cdot\varphi/2)}{1+\cos(2\cdot\varphi/2)} = \frac{2\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)}{1+\cos(\varphi/2)^2 - \sin(\varphi/2)^2} \\ &= \frac{2\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)}{2\cos(\varphi/2)^2} = \frac{\sin(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)} = \tan(\varphi/2). \end{aligned}$$

Für $-\pi < \varphi < \pi$ gilt nun $-\pi/2 < \varphi/2 < \pi/2$, und für Winkel in diesem Bereich gilt $\theta = \arctan(\tan\theta)$. Für $\varphi \in (-\pi,\pi)$ gilt daher $\varphi/2 = \arctan\big(y/(x+\sqrt{x^2+y^2})\big)$, so daß auf $U := \mathbb{R}^2 \setminus \big((-\infty,0]\times\{0\}\big)$ (also auf der gesamten Ebene mit Ausnahme der negativen x-Achse) die Funktion g eine Umkehrfunktion zu f darstellt. Die Formel $\tan(\varphi/2) = y/(x+\sqrt{x^2+y^2})$ läßt sich auch leicht geometrisch als Konsequenz des Peripheriewinkelsatzes deuten. In den folgenden Diagrammen wird jeweils der Tangens von $\varphi/2$ als Quotient von Gegenkathete und Ankathete in dem grau schraffierten Dreieck ermittelt.

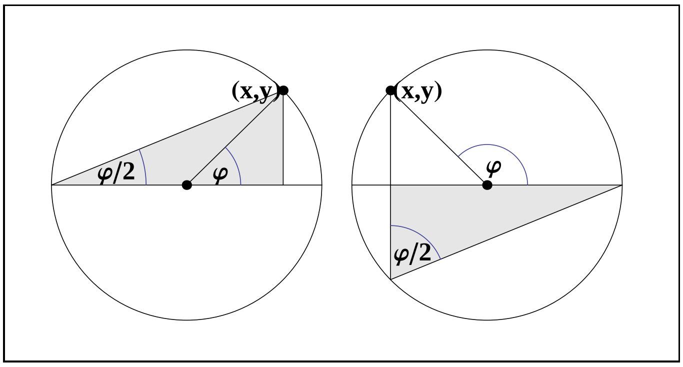

Abb. 96.4: Geometrische Deutung der Formel $\tan(\varphi/2) = y/(x+\sqrt{x^2+y^2})$ für den Polarwinkel eines Punktes (x,y).

Lösung (96.5) An jeder Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$f'(x, y) \;=\; \begin{bmatrix} e^x & e^y \\ e^x & -e^{-y} \end{bmatrix}$$

und damit $f'(x, y) = -e^{x-y} - e^{x+y} < 0$. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist daher die Gleichung

$$(\star) \qquad \begin{bmatrix} e^x + e^y \\ e^x + e^{-y} \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

um jeden Bildpunkt (u, v) lokal nach (x, y) auflösbar. Wir versuchen, diese Auflösung explizit anzugeben. Zunächst ist klar, daß in einem Bildpunkt (u, v) die Bedingungen $u > 0$ und $v > 0$ gelten müssen, daß also $f(\mathbb{R}^2) \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty)$ gilt. Subtraktion der beiden Komponenten liefert $u - v = e^y - e^{-y}$, folglich $e^{2y} - (u-v)e^y - 1 = 0$ und damit $e^y = (u - v)/2 \pm \sqrt{(v - u)^2/4 + 1}$. Da die Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt, entfällt das negative Vorzeichen, und wir erhalten $e^y = \big(u - v + \sqrt{(u - v)^2 + 4}\big)/2$ bzw.

$$y \;=\; \ln\left(\frac{v - u + \sqrt{(v - u)^2 + 4}}{2}\right).$$

Einsetzen in die Definition von f liefert dann $e^x = \big(u + v - \sqrt{(u - v)^2 + 4}\big)/2$ bzw.

$$x \;=\; \ln\left(\frac{u + v - \sqrt{(u - v)^2 + 4}}{2}\right).$$

Die Auflösung nach x und y als Funktionen von u und v ist also eindeutig; damit sie möglich ist (damit also die auftretenden Funktionen definiert sind), muß $u + v > \sqrt{(u - v)^2 + 4}$ gelten, was wegen $u, v > 0$ äquivalent ist mit $(u+v)^2 > (u-v)^2+4$ bzw. $uv > 1$. Also ist f ein Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^2$ auf die Menge $f(\mathbb{R}^2) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v > 0,\ v > 1/u\}$.

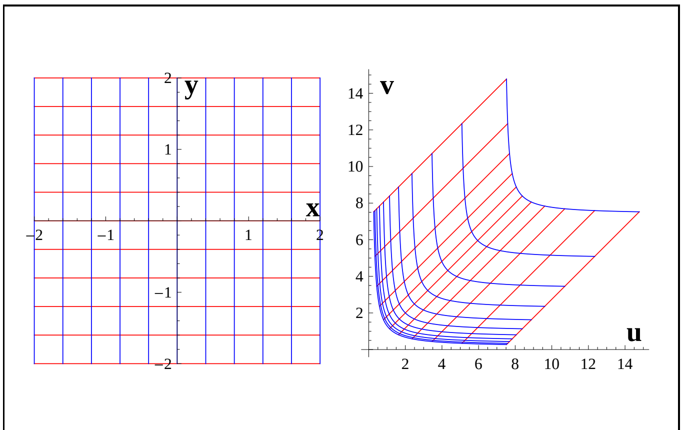

Abb. 96.5a: Wirkung der Funktion f.

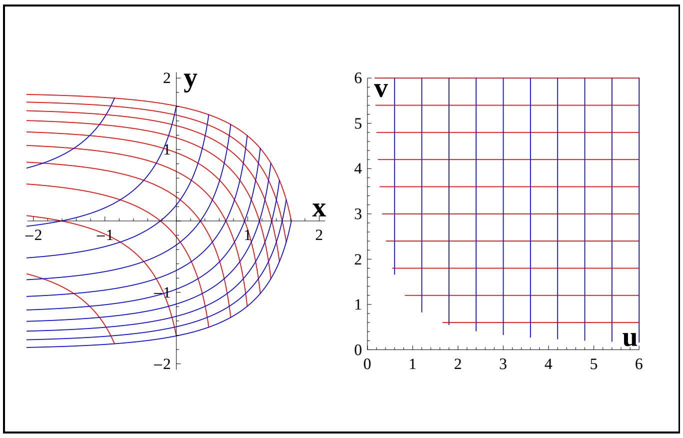

Abb. 96.5b: Wirkung der Umkehrfunktion $g = f^{-1}$.

Lösung (96.6) (a) Wir erhalten die Ableitungsmatrix

$$f'(x, y) \;=\; \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

und damit die Jacobi-Determinante $\det f'(x, y) = 4(x^2 - y^2)$. Diese verschwindet genau dann, wenn $y^2 = x^2$ gilt, wenn also der Punkt (x, y) auf der Vereinigung der beiden Winkelhalbierenden $y = \pm x$ liegt.

(b) Für einen Bildpunkt $(u, v) = (x^2+y^2, 2xy)$ haben wir offensichtlich $|v| = 2|xy| \le x^2+y^2 = u$. Umgekehrt ist jeder Punkt $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| \le u$ tatsächlich ein Bildpunkt. Wir können die möglichen Urbilder explizit angeben. Für $v = 0$ erhalten wir entweder $x = 0$ und $y = \pm\sqrt{u}$ oder aber $y = 0$ und $x = \pm\sqrt{u}$. Nun betrachten wir den generischen Fall $v \neq 0$. Die Gleichungen $u = x^2 + y^2$ und $v = 2xy$ führen zunächst auf $y = v/(2x)$ und dann auf $u = x^2 + v^2/(4x^2)$ bzw. $x^4 - ux^2 + (v^2/4) = 0$ und damit $x^2 = (u \pm \sqrt{u^2 - v^2})/2$ (wobei die Wurzel wegen $u^2 \ge v^2$ existiert). Dies liefert die vier Lösungen x_1, x_2, x_3, x_4, die den vier möglichen Vorzeichenwahlen in der erhaltenen Gleichung

$$x(u, v) \;=\; \pm\sqrt{\frac{u \pm \sqrt{u^2 - v^2}}{2}}$$

entsprechen. Für $1 \le i \le 4$ ist dann $y(u, v) = 2v/x_i(u, v)$. Setzen wir $V := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |v| < u\}$, so liefert dies die vier lokalen Umkehrabbildungen $f_i^{-1} : V \to U_i$, wobei $\bigcup_{i=1}^4 U_i$ die Menge der regulären Punkte von f ist.

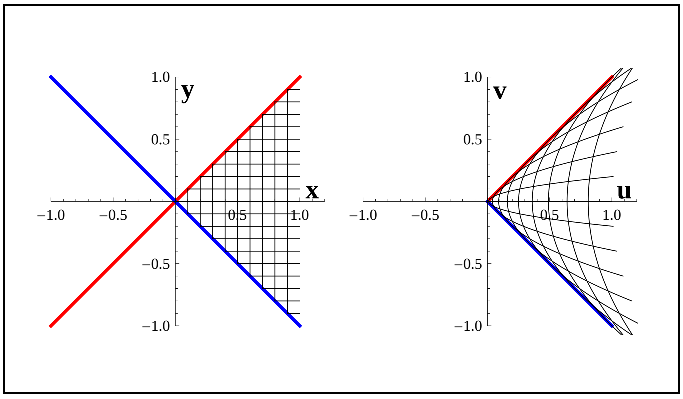

Abb 96.6a: Wirkung der Abbildung f.

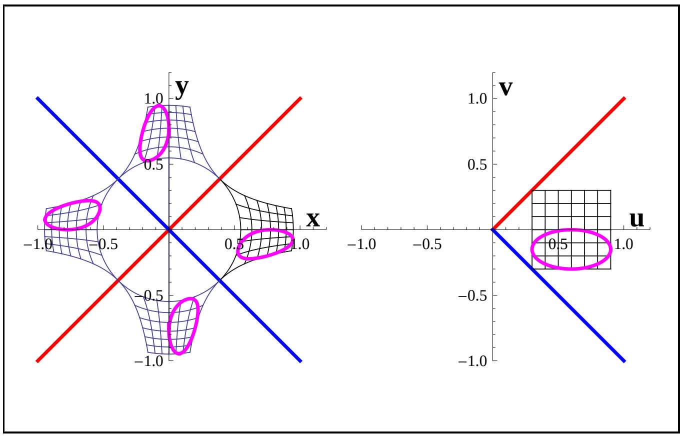

Abb. 96.6b: Wirkung der vier lokalen Umkehrabbildungen f_i^{-1}.

Lösung (96.7) (a) Wir erhalten die Ableitungsmatrix

$$f'(x,y) \;=\; \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

und damit die Jacobi-Determinante $\det f'(x,y) = 4(x^2+y^2)$. Diese verschwindet genau für $(x,y) \neq (0,0)$; außer im Nullpunkt ist f also überall ein lokaler Diffeomorphismus.

(b) Wir fragen, wann wir die Gleichung $(u,v) = (x^2-y^2, 2xy)$ nach x und y auflösen können. Für $v=0$ erhalten wir entweder $x=0$ und $y=\pm\sqrt{-u}$ (was nur für $u\le 0$ möglich ist) oder aber $y=0$ und $x=\pm\sqrt{u}$ (was nur für $u\ge 0$ möglich ist). Nun betrachten wir den generischen Fall $v\neq 0$. Die Gleichungen $u=x^2-y^2$ und $v=2xy$ führen zunächst auf $y=v/(2x)$ und dann auf $u=x^2+v^2/(4x^2)$ bzw. $x^4-ux^2+(v^2/4)=0$ und damit $x^2=(u\pm\sqrt{u^2+v^2})/2$ (wobei wegen $x^2\ge 0$ das negative Vorzeichen ausscheidet). Dies liefert die zwei Lösungen

$$x_{1,2}(u,v) \;=\; \pm\sqrt{\frac{u\pm\sqrt{u^2+v^2}}{2}}$$

und dann $y_i(u,v) = 2v/x_i(u,v)$ für $i=1,2$. Dies liefert die Umkehrfunktionen $f_i^{-1} = (x_i,y_i)$, wobei das Bild von f_1^{-1} die rechte Halbebene und das Bild von f_2^{-1} die linke Halbebene ist.

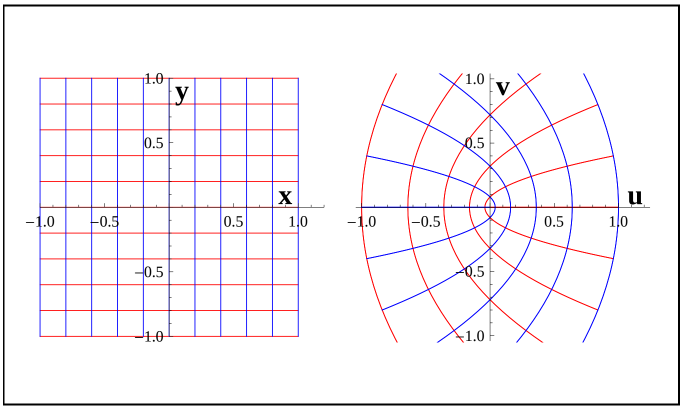

Abb 96.7a: Wirkung der Abbildung f.

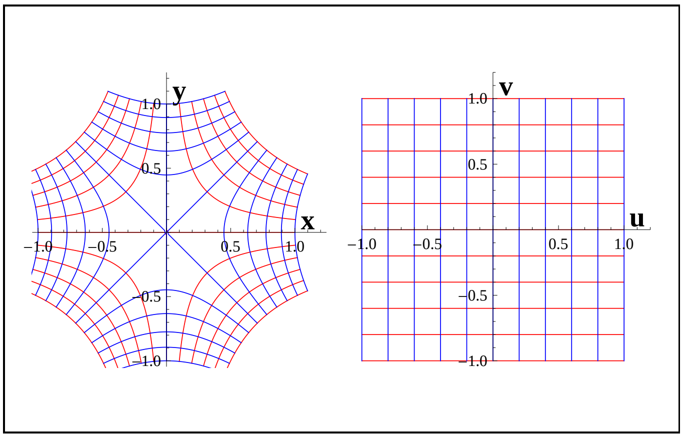

Abb. 96.7b: Wirkung der lokalen Umkehrabbildungen f_1^{-1} und f_2^{-1} der Abbildung f.

Lösung (96.8) Wir legen ein Koordinatensystem so, daß $(0,0)$ der Mittelpunkt des ersten Kreises und $(a,0)$ der Mittelpunkt des zweiten Kreises ist. Parametrisierungen von K_1 und K_2 sind dann gegeben durch

$$u \mapsto r_1 \begin{bmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad v \mapsto \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + r_2 \begin{bmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{bmatrix}$$

mit $u,v\in[0,2\pi)$. Die Menge M aller möglichen Streckenmittelpunkte ist daher der Bildbereich der Funktion

$$f(u,v) \;:=\; \frac{1}{2}\begin{bmatrix} r_1\cos(u)+r_2\cos(v)+a \\ r_1\sin(u)+r_2\sin(v) \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten

$$f'(u,v) \;=\; \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -r_1\sin(u) & -r_2\sin(v) \\ r_1\cos(u) & r_2\cos(v) \end{bmatrix}$$

und $\det\bigl(f'(u,v)\bigr) = (r_1r_2/4)\cdot\bigl(\sin(v)\cos(u)-\sin(u)\cos(v)\bigr) = (r_1r_2/4)\cdot\sin(v-u)$. Ist $\det\bigl(f'(u,v)\bigr)\neq 0$, so ist f in einer Umgebung des Punktes (u,v) lokal invertierbar, so daß $f(u,v)$ im Innern von M liegen muß. Als Randpunkte von M kommen nur diejenigen Punkte $f(u,v)$ in Frage, für die $\det\bigl(f'(u,v)\bigr)=0$ gilt; das bedeutet $v=u$ oder $v=u+\pi$ (modulo 2π). Wegen

$$f(u,u) \;=\; \begin{bmatrix} a/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{r_1+r_2}{2}\begin{bmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \end{bmatrix}$$

bilden die Punkte $f(u,u)$ einen Kreis mit Mittelpunkt $(a/2,0)$ und Radius $(r_1+r_2)/2$, und wegen

$$f(u,u+\pi) \;=\; \begin{bmatrix} a/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{r_1-r_2}{2}\begin{bmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \end{bmatrix}$$

bilden die Punkte $f(u,u+\pi)$ einen Kreis mit Mittelpunkt $(a/2,0)$ und Radius $|r_1-r_2|/2$. Damit ist klar, daß M ein Kreisring mit Mittelpunkt $(a/2,0)$, Innenradius $|r_1-r_2|/2$ und Außenradius $(r_1+r_2)/2$ ist.

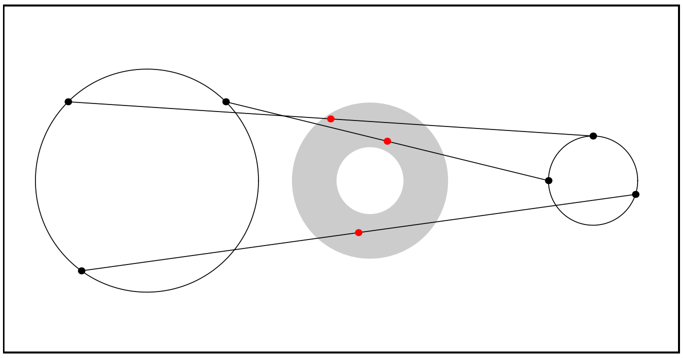

Abb. 96.8: Der grau markierte Kreisring ist die Menge aller Mittelpunkte von Strecken, die K_1 und K_2 verbinden.

Bemerkung. Probleme dieser Art kommen beispielsweise im Maschinenbau vor, etwa wenn man untersucht, welche Positionen von einem Roboterarm oder einer Pleuelstange während eines Bewegungsvorgangs eingenommen werden können.

Lösung (96.9) Wir definieren $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x, y, u, v) \;=\; \begin{bmatrix} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 \end{bmatrix}$$

und erhalten die Ableitungsmatrix

$$F'(x, y, u, v) \;=\; \begin{bmatrix} 2x & -2y & -3u^2 & 2v \\ 2y & 2(x+y) & -4u & 12v^3 \end{bmatrix}.$$

An der Nullstelle $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2, -1, 2, 1)$ von F ergibt sich

$$F'(x_0, y_0, u_0, v_0) \;=\; \begin{bmatrix} 4 & 2 & -12 & 2 \\ -2 & 2 & -8 & 12 \end{bmatrix}.$$

Der Satz über implizite Funktionen garantiert nun die lokale Auflösbarkeit der Gleichung $F = 0$ nach der i-ten und der j-ten Variablen, wenn die Matrix, die aus der i-ten und der j-ten Spalte dieser Ableitungsmatrix entsteht, invertierbar ist. Man prüft schnell nach, daß dies für alle i und j der Fall ist. Die Gleichung $F(x, y, u, v) = 0$ läßt sich also in einer Umgebung von $(2, -1, 2, 1)$ nach je zweien der vier Variablen x, y, u, v auflösen.

Lösung (96.10) Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial z}\big(x + y^2 + z - \sin(xz)\big) \;=\; 1 - x\cos(xz)$$

ist an der Stelle $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ von Null verschieden. Nach dem Satz über implizite Funktionen läßt sich daher die Gleichung $x + y^2 + z = \sin(xz)$ in einer Umgebung von $(0, 0, 0)$ nach z als Funktion von (x, y) auflösen; die Gleichung $x+y^2+z = \sin(xz)$ wird dann zu einer Identität für die Funktion z. Ableiten dieser Identität nach x und y liefert

$$(\star)\qquad \begin{aligned} 1 + z_x &= \cos(xz)\cdot(z + xz_x),\\ 2y + z_y &= \cos(xz)\cdot xz_y. \end{aligned}$$

Nochmaliges Ableiten dieser beiden Identitäten nach x und y liefert

$(\star\star)$

$$\begin{aligned} z_{xx} &= -\sin(xz)\cdot(z+xz_x)^2 + \cos(xz)\cdot(2z_x + xz_{xx}),\\ z_{xy} &= -\sin(xz)\cdot xz_y\cdot(z+xz_x) + \cos(xz)\cdot(z_y+xz_{xy}),\\ z_{yx} &= -\sin(xz)\cdot(z+xz_x)\cdot xz_y + \cos(xz)\cdot(z_y + xz_{yx}),\\ 2 + z_{yy} &= -\sin(xz)\cdot(xz_y)^2 + \cos(xz)\cdot xz_{yy}. \end{aligned}$$

Einsetzen von $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ in $(\star)$ liefert $z_x(0, 0) = 1$ und $z_y(0, 0) = 0$. Einsetzen von $(x, y, z, z_x, z_y) = (0, 0, 0, 1, 0)$ in $(\star\star)$ liefert dann $z_{xx}(0, 0) = -2$, $z_{xy}(0, 0) = 0$, $z_{yx}(0, 0) = 0$ und $z_{yy}(0, 0) = -2$. Daß $z_{xy}(0, 0) = z_{yx}(0, 0)$ gelten würde, war dabei nach dem Satz von Schwarz von vornherein klar.

Lösung (96.11) Wir definieren $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x, y, u, v) \;=\; \begin{bmatrix} x^2 + uy + e^v \\ 2x + u^2 - uv - 5 \end{bmatrix}$$

und erhalten die Ableitungsmatrix

$$\frac{\partial F(x, y, u, v)}{\partial(u, v)} \;=\; \begin{bmatrix} y & e^v \\ 2u-v & -u \end{bmatrix}.$$

An der Nullstelle $(2, 5, -1, 0)$ von F ergibt sich

$$\det\frac{\partial F(x, y, u, v)}{\partial(u, v)} \;=\; \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \;=\; 7 \;\neq\; 0.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen ist die fragliche Auflösung also möglich.

Lösung (96.12) Wir definieren

$$F(x, y, z) \;:=\; xz^2 + e^{2z} + y$$

und erhalten $F_z(x, y, z) = 2xz+2e^{2z}$. Wegen $F(1, -1, 0) = 0$ und $F_z(1, -1, 0) = 2 \neq 0$ läßt sich die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ nach dem Satz über implizite Funktionen in einer Umgebung von $(1, -1, 0)$ nach z als C^∞-Funktion von (x, y) auflösen; damit ist die Existenz einer Funktion f mit den angegebenen Eigenschaften nachgewiesen. Ableiten der Identität $0 = xf^2 + e^{2f} + y$ nach x bzw. y liefert

$$(\star)\qquad \begin{aligned} 0 &= f^2 + 2xff_x + 2e^{2f}f_x,\\ 0 &= 2xff_y + 2e^{2f}f_y + 1. \end{aligned}$$

Leiten wir diese beiden Identitäten erneut jeweils nach x und nach y ab, so erhalten wir

$(\star\star)$

$$\begin{aligned} 0 &= 4ff_x + 2xf_x^2 + 2xff_{xx} + 4e^{2f}f_x^2 + 2e^{2f}f_{xx},\\ 0 &= 2ff_y + 2xf_yf_x + 2xff_{xy} + 4e^{2f}f_yf_x + 2e^{2f}f_{xy},\\ 0 &= 2ff_y + 2xf_xf_y + 2xff_{yx} + 4e^{2f}f_xf_y + 2e^{2f}f_{yx},\\ 0 &= 2xf_y^2 + 2xff_{yy} + 4e^{2f}f_y^2 + 2e^{2f}f_{yy}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun $(x, y) = (1, -1)$ und damit $f = 0$ in $(\star)$ ein, so erhalten wir die Gleichungen $2f_x = 0$ und $2f_y = -1$, also

$$f_x(1, -1) \;=\; 0, \qquad f_y(1, -1) \;=\; -1/2.$$

An der Stelle $(x, y) = (1, -1)$ haben wir also $f = 0$, $f_x = 0$ und $f_y = -1/2$; setzen wir dies in $(\star\star)$ ein, so ergeben sich die Gleichungen $2f_{xx} = 0$, $2f_{xy} = 0$, $2f_{yx} = 0$ und $(1/2) + 1 + 2f_{yy} = 0$; wir erhalten also

$$\begin{aligned} &f_{xx}(1,-1) \;=\; f_{xy}(1,-1) \;=\; f_{yx}(1,-1) \;=\; 0 \quad \text{und} \\ &f_{yy}(1,-1) \;=\; -3/4. \end{aligned}$$

Daß die Werte von f_{xy} und f_{yx} gleich sein würden, war dabei nach dem Satz von Schwarz von vornherein klar,

Lösung (96.13) Wir definieren $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x, y, u, v) \;:=\; \begin{bmatrix} xu + yu^2 v - 2 \\ xu^3 + y^2 v^4 - 2 \end{bmatrix}$$

und fragen, ob sich die Gleichung $F(x, y, u, v) = 0$ in einer Umgebung der Lösung $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 1, 1)$ nach (u, v) auflösen läßt. Dazu berechnen wir

$$\frac{\partial F(x, y, u, v)}{\partial(u, v)} \;=\; \begin{bmatrix} x + 2yuv & yu^2 \\ 3xu^2 & 4y^2 v^3 \end{bmatrix}$$

und erhalten

$$\det \frac{\partial F}{\partial(u, v)}(1, 1, 1, 1) \;=\; \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \;=\; 9 \;\neq\; 0;$$

nach dem Satz über implizite Funktionen ist die fragliche Auflösung also möglich.

Lösung (96.14) Wir definieren $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x, y, z, a, b) \;:=\; \begin{bmatrix} x^n - y - a \\ y^n - z - b \\ z^n - x \end{bmatrix}$$

und erhalten

$$f'(x, y, z, a, b) \;=\; \begin{bmatrix} nx^{n-1} & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & ny^{n-1} & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & nz^{n-1} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

insbesondere also

$$f'(0, 0, 0, 0, 0) \;=\; \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da die ersten drei Spalten dieser Matrix linear unabhängig sind, ist nach dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung $F(x, y, z, a, b) = (0, 0, 0)$ in einer Umgebung der Lösung $(x_0, y_0, z_0, a_0, b_0) = (0, 0, 0, 0, 0)$ nach x, y, z (als Funktionen von a und b) auflösbar. (Die aufgelösten Gleichungen explizit hinzuschreiben, ist unmöglich, selbst in dem vergleichsweise einfachen Fall $n = 2$.)

Lösung (96.15) (a) Wir benutzen die Cardanische Formel, um die Gleichung $y^3 - 3xy + x^3 = 0$ nach y aufzulösen. Mit $p := -3x$ und $q := x^3$ ist die Diskriminante gegeben durch $\Delta = (q^2/4) + (p^3/27) = (x^6/4) - x^3$. Wir erhalten dann die folgende Fallunterscheidung.

• Gilt $\Delta > 0$ (also $x < 0$ oder $x > \sqrt[3]{4}$), so hat die Gleichung $y^3 - 3xy + x^3 = 0$ eine eindeutige reelle Lösung, nämlich

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left[\sqrt[3]{\sqrt{x^3(x^3-4)} - x^3} - \sqrt[3]{\sqrt{x^3(x^3-4)} + x^3} \right].$$

• Gilt dagegen $\Delta < 0$, also $0 < x < \sqrt[3]{4}$, so hat die Gleichung $y^3 - 3xy + x^3 = 0$ genau drei verschiedene reelle Lösungen, nämlich

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 2\sqrt{x}\cos\big(\varphi(x)/3\big), \\ y_2(x) &= 2\sqrt{x}\cos\big((\varphi(x) + 2\pi)/3\big), \\ y_3(x) &= 2\sqrt{x}\cos\big((\varphi(x) + 4\pi)/3\big) \end{aligned}$$

mit $\varphi(x) := \arccos\big(-(1/2)\, x^{3/2}\big)$.

Da die Fragestellung vollkommen symmetrisch in x und y ist, ergibt sich natürlich die analoge Aussage, wenn man nach x statt nach y auflöst.

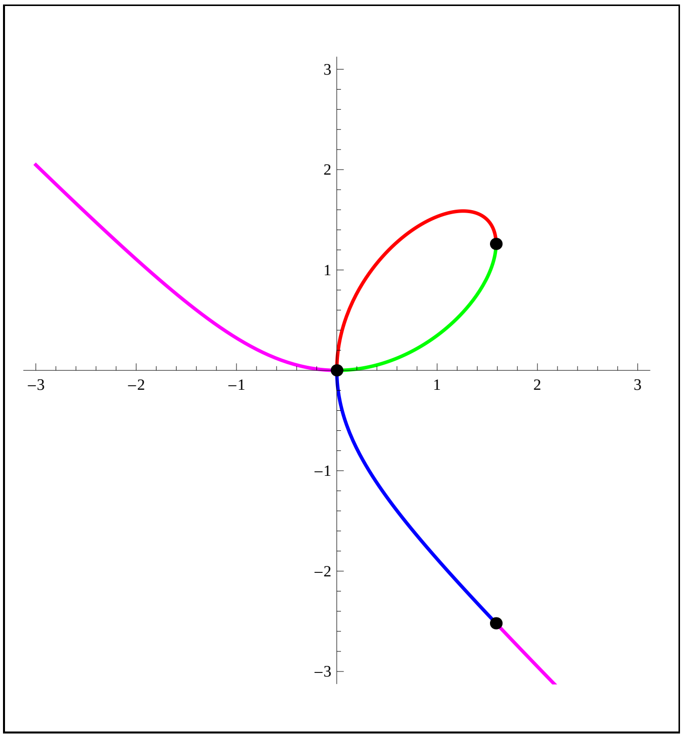

Abb. 96.15a: Auflösen der Gleichung $x^3 + y^3 = 3xy$ nach der Variablen y.

(b) Für $\big(x(t), y(t)\big) = \left(\dfrac{3t}{1 + t^3}, \dfrac{3t^2}{1 + t^3} \right)$ ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} \;=\; \frac{3}{(1 + t^3)^2} \begin{bmatrix} 1 - 2t^3 \\ 2t - t^4 \end{bmatrix}.$$

(c) Die stereographische Projektion von der Äquatorebene auf die Einheitssphäre ist gegeben durch

$$p(x,y) \;=\; \frac{1}{x^2+y^2+1}\begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ x^2+y^2-1 \end{bmatrix}.$$

Das Bild des Kartesischen Blattes unter dieser Projektion ist dann die Kurve

$$\begin{aligned} \alpha(t) \;&:=\; p\left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right) \\ &=\; \frac{1}{9t^2+9t^4+(1+t^3)^2}\begin{bmatrix} 6t(1+t^3) \\ 6t^2(1+t^3) \\ 9t^2+9t^4-(1+t^3)^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten $\alpha(-1) = (0,0,1)^T$; für $t=-1$ geht also der "Punkt im Unendlichen" auf dem Kartesischen Blatt über in den Nordpol der Einheitssphäre.

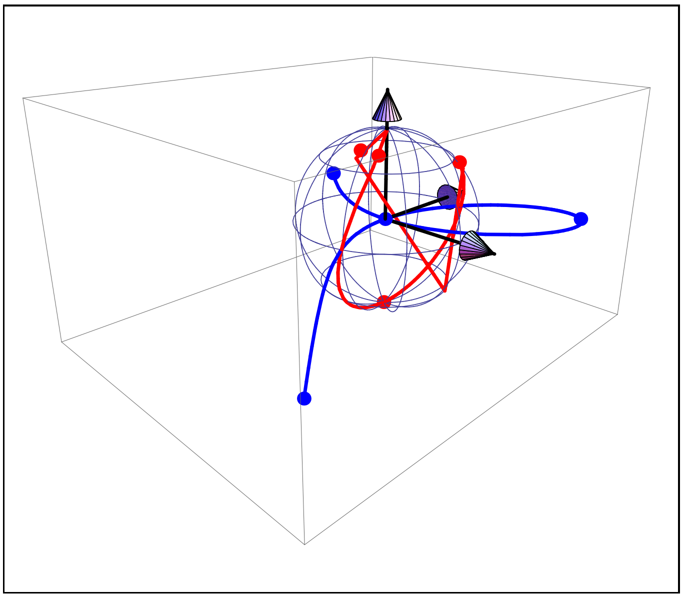

Abb. 96.15b: Stereographische Projektion des Kartesischen Blattes.

(d) Erfüllt eine Funktion y die Identität $x^3+y^3 = 3xy$, so liefert Einsetzen des Wertes $x=0$ die Bedingung $y(0)^3 = 0$ und damit $y(0)=0$. Implizites Ableiten der Identität $x^3+y^3 = 3xy$ nach x liefert $3x^2+3y^2y' = 3y + 3xy'$. Einsetzen von $x=0$ liefert nur die Gleichung $0=0$, so daß wir auf diese Weise den Wert $y'(0)$ nicht ermitteln können. Da y analytisch sein soll, muß es aber eine Zahl $\varepsilon > 0$ geben mit $y(x) \neq 0$ für $0 < |x| < \varepsilon$ und damit (sofern $\varepsilon < 3/2$) auch $y(x) \neq x$. (Aus $y=x$ folgt wegen $x^3+y^3 = 3xy$ nämlich $2x^3 = 3x^2$ und damit $x=0$ oder $x = 3/2$.) Wir können daher die Gleichung $3x^2-3y = (3x-3y^2)y'$ für $0<|x|<\varepsilon$ in der Form

$$y' \;=\; \frac{x^2-y}{x-y^2}$$

schreiben und dann die Regel von de l'Hospital anwenden; diese liefert

$$\begin{aligned} y'(0) \;&=\; \lim_{x\to 0} y'(x) \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{x^2-y(x)}{x-y(x)^2} \\ &=\; \lim_{x\to 0}\frac{2x-y'(x)}{1-2y(x)y'(x)} \;=\; \frac{-y'(0)}{1-0} \;=\; -y'(0) \end{aligned}$$

und damit $y'(0)=0$. Es ist daher sinnvoll, $y(x) = x^2\eta(x)$ mit einer noch zu bestimmenden Funktion η anzusetzen. Einsetzen von $y = x^2\eta$ in die Gleichung $x^3+y^3-3xy = 0$ liefert $x^3+x^6\eta^3-3x^3\eta = 0$ bzw. $1+x^3\eta^3-3\eta = 0$. Fassen wir $F(x,\eta) := 1-3\eta+x^3\eta^3$ als analytische Funktion in den zwei Variablen x und η auf, so ist der Koeffizient $b_{01} = -3$ von Null verschieden; nach Satz (76.12) im Buch gibt es daher eine analytische Funktion $\eta = \eta(x)$, die die Gleichung $F(x,\eta) = 0$ identisch erfüllt. Der Ansatz $\eta(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ ergibt

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; 1 + x^3\big(a_0^3 + 3a_0^2a_1x + (3a_0^2a_2 + 3a_0a_1^2)x^2 + \cdots\big) \\ &\quad - (3a_0 + 3a_1x + 3a_2x^2 + 3a_3x^3 + \cdots) \\ &=\; (1-3a_0) \;-\; 3a_1x \;-\; 3a_2x^2 + (a_0^3 - 3a_3)x^3 + \cdots \end{aligned}$$

und folglich $a_0 = 1/3$, $a_1 = a_2 = 0$ sowie $a_3 = a_0^3/3 = 1/(81)$. Die gesuchte Funktion y hat also die Form $y(x) = (x^2/3) + (x^5/81) +$ höhere Potenzen von x.

Lösung (96.16) Die Gleichungen $g_1(x) = g_2(x) = 0$ lassen sich umschreiben als

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bzw. äquivalent dazu in der Form

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \;=\; \frac{1}{x_1^2+x_2^2}\begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;=\; \frac{1}{x_1^2+x_2^2}\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

(Beachte, daß $x_1^2+x_2^2 \neq 0$ gelten muß, denn sonst hätten wir $x_1 = x_2 = 0$ im Widerspruch zu der Gleichung $x_1x_4 - x_2x_3 = 1$.) Also gilt

$$M \;=\; \left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \mid x_3 = \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}, x_4 = \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right\},$$

so daß M der Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ ist, die gegeben ist durch

$$f(x_1,x_2) \;:=\; \left(\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right).$$

Lösung (96.17) (a) Wir fassen g_1 und g_2 als Komponenten einer Funktion $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ auf. Die Ableitung von g ist dann gegeben durch die Matrix

$$g'(x_1,x_2,x_3,x_4) \;=\; \begin{bmatrix} x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \end{bmatrix}.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen ist die Auflösung der Gleichung $g(x) = 0$ (also der beiden skalaren Gleichungen $g_1(x) = 0$ und $g_2(x) = 0$) nach zweien der Variablen x_i in einer Umgebung von $x \in M$ genau dann möglich, wenn $g'(x)$ den Rang 2 hat, wenn also die beiden Zeilen von $g'(x)$ linear unabhängig sind. (Bei diesen beiden Zeilen handelt es sich einfach um die als Zeilenvektoren geschriebenen Gradienten $(\nabla g_1)(x)$ und $(\nabla g_2)(x)$.)

Die aus der ersten und letzten Spalte bestehende Untermatrix von $g'(x)$ hat die Determinante $2(x_4^2 - x_1^2)$; eine lokale Auflösung nach (x_1, x_4) ist also allenfalls dann nicht möglich, wenn $x_4^2 = x_1^2$ gilt, also $x_4 = \pm x_1$. Im Fall $x_4 = x_1$ gehen die Gleichungen $g_1(x) = 0$ und $g_2(x) = 0$ über in $x_1^2 - x_2x_3 = 1$ und $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$, aus denen $x_2^2 + x_3^2 = 2(1 - x_1^2) = -2x_2x_3$ und damit $0 = x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = (x_2 + x_3)^2$ bzw. $x_3 = -x_2$ folgt. Für $x_4 = x_1$ ergeben sich also die kritischen Punkte $(x_1, x_2, -x_2, x_1)$ mit $x_1^2 + x_2^2 = 1$, also die Punkte der Form

$$(\star) \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4) \;=\; (\cos\varphi,\, \sin\varphi,\, -\sin\varphi,\, \cos\varphi)$$

mit $\varphi \in \mathbb{R}$. Im Fall $x_4 = -x_1$ gehen die Gleichungen $g_1(x) = 0$ und $g_2(x) = 0$ über in $-x_1^2 - x_2x_3 = 1$ und $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$, aus denen $x_2^2 + x_3^2 = 2 - 2 + 2x_2x_3$ bzw. $0 = x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 = (x_2 - x_3)^2$ und damit $x_3 = x_2$ folgt. Für $x_4 = -x_1$ ergeben sich also die kritischen Punkte $(x_1, x_2, x_2, -x_1)$ mit $x_1^2 + x_2^2 = 1$, also die Punkte der Form

$$(\star\star) \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4) \;=\; (\cos\varphi,\, \sin\varphi,\, \sin\varphi,\, -\cos\varphi)$$

mit $\varphi \in \mathbb{R}$. Außer an den Punkten der Form $(\star)$ bzw. $(\star\star)$ ist also eine lokale Auflösung nach (x_1, x_4) möglich. An den Punkten der Form $(\star)$ gilt nun $(\nabla g_2)(x) = 2(\nabla g_1)(x)$ (d.h., die zweite Zeile von $g'(x)$ ist das Doppelte der ersten Zeile), während an den Punkten der Form $(\star\star)$ die Gleichung $(\nabla g_2)(x) = -2(\nabla g_1)(x)$ gilt (also die zweite Zeile von $g'(x)$ das (-2)-fache der ersten Zeile ist). Der Satz über implizite Funktion garantiert also in diesen Punkten auch nicht die Auflösbarkeit nach anderen Variablen als x_1 und x_4.

(b) Wir versuchen explizit, die Gleichungen

$$x_1x_4 - x_2x_3 = 1, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$$

nach (x_1, x_4) als Funktionen von (x_2, x_3) aufzulösen. Wir überlegen zunächst, daß $x_4 \neq 0$ gelten muß. Wäre $x_4 = 0$, so erhielten wir $x_2x_3 = -1$ (also $x_3 = -1/x_2$) und folglich $2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + (1/x_2^2)$, also $x_1^2 = 2 - x_2^2 - (1/x_2)^2 = -(x_2 - 1/x_2)^2 \leq 0$, was nur für $x_1 = 0$ und $x_2 = \pm 1$ möglich ist. Außer den singulären Punkten $\pm(0, 1, -1, 0)$ enthält M also keinen Punkt x mit $x_4 = 0$. Wir nehmen also $x_4 \neq 0$ an. Die erste Gleichung liefert dann $x_1 = (1 + x_2x_3)/x_4$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich $\big((1+x_2x_3)^2/x_4^2\big) + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$ bzw.

$$x_4^4 \;+\; (x_2^2 + x_3^2 - 2)\cdot x_4^2 + (1 + x_2x_3)^2 \;=\; 0.$$

Diese Gleichung liefert

$$\begin{aligned} x_4^2 \;&=\; \frac{2 - x_2^2 - x_3^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(2 - x_2^2 - x_3^2)^2}{4} - (1 + x_2x_3)^2} \\ &=\; \frac{1}{2}\left(2 - x_2^2 - x_3^2 \pm \sqrt{(2 - x_2^2 - x_3^2)^2 - 4(1 + x_2x_3)^2}\right) \\ &=\; \frac{1}{2}\left(2 - x_2^2 - x_3^2 \pm \sqrt{(x_2 - x_3)^2\big((x_2 + x_3)^2 - 4\big)}\right) \\ &=\; \frac{1}{2}\left(2 - x_2^2 - x_3^2 \pm (x_2 - x_3)\sqrt{(x_2 + x_3)^2 - 4}\right). \end{aligned}$$

Man rechnet nun schnell nach, daß stets $2 - x_2^2 - x_3^2 \geq |x_2 - x_3| \cdot \sqrt{(x_2 + x_3)^2 - 4}$ gilt, sofern die auftretende Wurzel überhaupt definiert ist, was der Fall ist, wenn $x_3 = x_2$ oder aber $|x_2 + x_3| \geq 2$ gilt. Aus $|x_2 + x_3| = 2$ würde $4 = (x_2 + x_3)^2 = x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 = (2 - x_1^2 - x_4^2) + 2(x_1x_4 - 1) = -(x_1 - x_4)^2$ und damit ein Widerspruch folgen. Die Auflösung der Gleichungen $g_1(x) = g_2(x) = 0$ nach (x_1, x_4) als Funktionen von (x_2, x_3) ist also genau dann möglich, wenn $|x_2 + x_3| > 2$ gilt, und liefert dann (je nachdem, ob $x_4 > 0$ oder $x_4 < 0$ gilt) die Darstellungen

$$x_4 \;=\; \pm\sqrt{\frac{2 - x_2^2 - x_3^2 \pm (x_2 - x_3)\sqrt{(x_2 + x_3)^2 - 4}}{2}}.$$

Setzt man dies in die Gleichung $x_1 = (1 + x_2x_3)/x_4$ ein, so erhält man auch x_1 als Funktion von x_2 und x_3.

Lösung (96.18) Wir definieren $F : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, x) \;:=\; \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$$

und schreiben $p(x) := F(a_0, a_1, \ldots, a_n, x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Da ξ als einfache Nullstelle von p vorausgesetzt wurde, gelten die Gleichungen $0 = p(\xi) = F(a_0, \ldots, a_n, \xi)$ und $0 \neq p'(\xi) = (\partial F/\partial x)(a_0, \ldots, a_n, \xi)$. Nach dem Satz über implizite Funktion läßt sich daher die Gleichung

$$F(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, X) \;=\; \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n \;=\; 0$$

in einer Umgebung von $(a_0, \ldots, a_n, \xi)$ nach X als C^∞-Funktion von $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ auflösen.

Lösung (96.19) Wir ergänzen $v_1 := x_0$ zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V und können dann V mit $\mathbb{R}^n$ und $\mathrm{End}(V)$ mit $\mathbb{R}^{n\times n}$ identifizieren. Die Ableitung von f ist gegeben durch

$$f'(x, \lambda, A) \;=\; \begin{bmatrix} A - \lambda\mathbf{1} & -x & \varepsilon_x \\ 2x^T & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

wobei ε_x die Evaluation an der Stelle x bezeichnet (also durch $\varepsilon_x(B) := Bx$ gegeben ist) und wobei $x^T = \langle\cdot, x\rangle$ gilt. Um den Satz über implizite Funktionen anwenden zu können, müssen wir zeigen, daß die $(n+1)\times(n+1)$-Teilmatrix

$$(\star) \qquad \begin{bmatrix} A - \lambda\mathbf{1} & -x \\ 2x^T & 0 \end{bmatrix}$$

für $(x, \lambda, A) = (x_0, \lambda_0, A_0)$ invertierbar ist. Unter der angegebenen Identifizierung ist $x_0 = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$, und die erste Spalte der Matrix $A_0 - \lambda\mathbf{1}$ ist $(A_0 - \lambda\mathbf{1})e_1 = (\lambda_0 - \lambda)e_1$. Für $A = A_0$ und $x = x_0$ ist $(\star)$ daher von der Form

$$(\star\star) \qquad \begin{bmatrix} \lambda_0 - \lambda & \star & -1 \\ 0 & B & 0 \\ 2 & 0^T & 0 \end{bmatrix}$$

mit einer $(n-1) \times (n-1)$-Matrix B, für die offensichtlich $(\lambda_0 - \lambda)\det(B) = \det(A_0 - \lambda\mathbf{1})$ gilt. Entwickeln zunächst nach der letzten Spalte und dann nach der letzten Zeile zeigt, daß die Determinante von $(\star\star)$ gegeben ist durch $2\det(B) = 2\det(A_0 - \lambda\mathbf{1})/(\lambda_0 - \lambda)$. Für $\lambda \to \lambda_0$ ergibt sich dann

$$\det \begin{bmatrix} A_0 - \lambda_0\mathbf{1} & -x_0 \\ 2x_0^T & 0 \end{bmatrix} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} 2 \cdot \frac{\det(A_0 - \lambda\mathbf{1})}{\lambda_0 - \lambda},$$

und da λ_0 als einfacher Eigenwert von A_0 vorausgesetzt wurde, ist dieser Wert von Null verschieden. Also hat die aus den ersten $n+1$ Spalten bestehende Teilmatrix von $f'(x_0, \lambda_0, A_0)$ eine von Null verschiedene Determinante. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist daher die Gleichung $f(x, \lambda, A) = 0$ in einer Umgebung von (x_0, λ_0, A_0) durch C^∞-Funktionen nach (x, λ) auflösbar.

Lösung (96.20) Offensichtlich gilt genau dann $x^3 - y^3 = 0$ bzw. $x^3 = y^3$, wenn $x = y$ gilt. Die Gleichung $x = y$ stellt sowohl x als Funktion von y als auch y als Funktion von x dar. Für $g(x, y) := x^3 - y^3$ gilt nun $g'(x, y) = (3x^2, -3y^2)$ und damit $g'(0, 0) = (0, 0)$. Der Satz über implizite Funktionen garantiert also weder die Auflösbarkeit nach x als Funktion von y noch die Auflösbarkeit nach y als Funktion von x in einer Umgebung von $(0, 0)$.

Lösung (96.21) Nach Voraussetzung gibt es eine offene Umgebung U von p in $\mathbb{R}^n$, eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ und eine C^1-Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ mit

$$\{x \in U \mid g(x) = 0\} = \{\big(x', f(x')\big) \mid x' \in \Omega\}.$$

Dann gilt $g\big(x', f(x')\big) = 0$ für alle $x' \in \Omega$. Nach der Kettenregel folgt hieraus

$$\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x'}(x)}_{m \times d} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x''}(x)}_{m \times m} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x'}(x')}_{m \times d} = 0$$

für alle $x = (x', x'') \in U$. Schreiben wir $A := \partial g/\partial x'$, $B := \partial g/\partial x''$ und $X := \partial f/\partial x'$, so bedeutet dies $A + BX = 0$ bzw. $BX = -A$. Also liegt jede Spalte von $-A$ und damit auch jede Spalte von A selbst im Bild von B, so daß sich der Rang von B nicht vergrößert, wenn wir die Spalten von A als zusätzliche Spalten an B anhängen. Also gilt $\text{rank}(B) = \text{rank}(A \mid B) = \text{rank}(\partial g/\partial x)$, und das ist die Behauptung.