Hochschule RheinMain WS 2016/17
Prof. Dr. D. Lehmann

6. Übungsblatt zur Vorlesung Ökonometrie

Aufgabe 1: Zufallszahlen $x_1, x_2, ...$ heissen exponential-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, wenn für alle $x \geq 0$

$$\mathsf{Prob}\big[\, x_i \in [x, x+dx)\,\big] \;=\; \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$$

gilt und die Wahrscheinlichkeit für negative Zahlen 0 ist, also $\mathsf{Prob}[\, x_i \in [x, x+dx)\,] \;=\; 0$ falls $x < 0$.

a) Zeigen Sie, dass zu einer gegebenen Realisierung von Zufallszahlen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ der Maximum Likelihood Estimater für λ gegeben ist durch

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n) \;=\; \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

b) Wenn Sie überprüfen sollten, ob $\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}$ erwartungstreu ist, welche mathematische Gleichung müssten Sie dann zeigen?

c) Beweisen Sie jetzt: der Maximum Likelihood Schätzer ist nicht erwartungstreu, aber der modifizierte Schätzer

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{mod}}(x_1, ..., x_n) \;:=\; \frac{1}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

ist erwartungstreu. Zum Beweis benötigen Sie die Resultate aus Teil (d) und (e).

d) Zeigen Sie: Für jede Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n \;=\; \int_0^\infty f(y)\, \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\, dy$$

e) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt $\int_0^\infty y^m\, e^{-y}\, dy \;=\; m!$.

Aufgabe 2: Wir wollen die Resultate aus Aufgabe 1 mit einer geeigneten R-Simulation überprüfen:

a) Die Exponential-Verteilung gehört zu den in R eingebauten Verteilungen. Erzeugen Sie $n = 1000$ mit Parameter $\lambda = 4$ exponential-verteilte Zufallszahlen und speichern Sie sie in dem Vektor `x`. Erstellen Sie einen Plot und ein Histogramm von `x`.

b) Berechnen Sie die Werte der Schätzer $\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}$ und $\hat{\lambda}_{\mathrm{mod}}$.

..bitte wenden..

c) Legen Sie den Vektor $\vec{\lambda} = (0.1, 0.2, 0.3, \cdots, 9.8, 9.9, 10.0) =: (\lambda_1, \cdots, \lambda_{100})$ an. Berechnen Sie dann numerisch den Wert der log-Likelihood-Funktion für alle $\lambda_1, ..., \lambda_{100}$ und speichern Sie diese Zahlen in dem Vektor `logL = (logL[1],logL[2],...,logL[100])`. Plotten Sie schliesslich `logL` als Funktion von $\vec{\lambda}$ und verifizieren Sie, dass das Maximum von `logL` an der Stelle $\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}$ angenommen wird.

d) Wiederholen Sie die Schritte (a)-(c) noch einmal für verschiedene Werte von n, etwa $n = 2000, 4000, 8000$ und $n = 16000$.