Hochschule RheinMain WS 2016/17
Prof. Dr. D. Lehmann

3. Übungsblatt zur Vorlesung Ökonometrie

Aufgabe 1) Zufallszahlen $\xi_1, \xi_2, ...$ heissen χ^2-verteilt mit n Freiheitsgraden oder kurz χ^2_n-verteilt, wenn

$$\mathsf{P}\left[\, \xi_i \in (\xi, \xi + d\xi) \,\right] \;=\; p_{\chi^2_n}(\xi)\, d\xi$$

mit der Dichte

$$p_{\chi^2_n}(\xi) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\, \xi^{n/2-1}\, e^{-\xi/2} & \text{für } \xi > 0 \\ 0 & \text{für } \xi \leq 0 \end{cases}$$

Dabei ist die Gamma-Funktion gegeben durch (für $t > 0$)

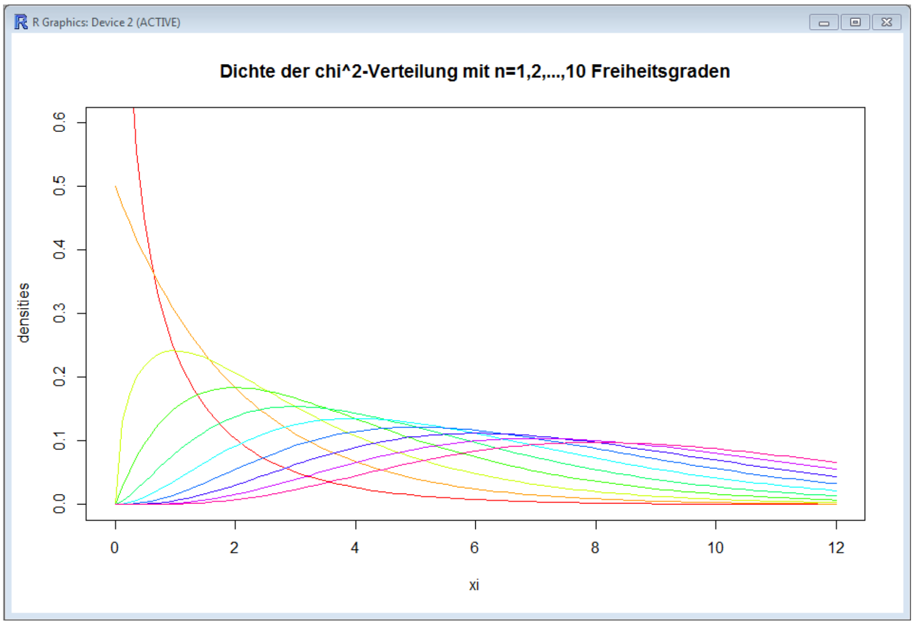
$$\Gamma(t) \;=\; \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx \;.$$

Es gilt die folgende Aussage $A(n)$: Sind $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ standard-normalverteilte Zufallszahlen (mean=0, sd=1), dann hat die Zufallszahl

$$\xi \;:=\; \phi_1^2 + \phi_2^2 + \cdots + \phi_n^2$$

eine χ^2_n-Verteilung. Diese Aussage wollen wir in dieser Aufgabe mit einer R-Simulation überprüfen. Starten Sie dazu eine R-Session und führen Sie folgende Berechnungen durch:

a) Versuchen Sie, folgendes Bild zu reproduzieren:



Schauen Sie sich dazu die Übersicht auf Seite 88, das ist die 2. Seite in dem pdf-file, von `W'keitsverteilungen-in-R.pdf` an, um die Syntax für die Dichte-Funktionen $p_{\chi^2_n}(\xi)$ herauszufinden; erinnern Sie sich daran, dass es zu jeder W'keitsverteilung Vert die 4 Funktionen, rVert, dVert, pVert und qVert gibt, welche müssen Sie hier nehmen?

b) Legen Sie die Variablen $n = 5$ und $N = 10000$ (R unterscheidet Gross- und Kleinbuchstaben) an und erzeugen Sie dann $n \times N$ standard-normalverteilte Zufallszahlen (mean=0, sd=1). Speichern Sie diese Zufallszahlen in einer Matrix

$$\text{Phi} \quad := \quad \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_n \\ \phi_{n+1} & \phi_{n+2} & \cdots & \phi_{2n} \\ \phi_{2n+1} & \phi_{2n+2} & \cdots & \phi_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{(N-1)n+1} & \phi_{(N-1)n+2} & \cdots & \phi_{Nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times n}$$

Berechnen Sie dann die Matrix

$$\text{PhiSquared} \quad := \quad \begin{pmatrix} \phi_1^2 & \phi_2^2 & \cdots & \phi_n^2 \\ \phi_{n+1}^2 & \phi_{n+2}^2 & \cdots & \phi_{2n}^2 \\ \phi_{2n+1}^2 & \phi_{2n+2}^2 & \cdots & \phi_{3n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{(N-1)n+1}^2 & \phi_{(N-1)n+2}^2 & \cdots & \phi_{Nn}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times n}$$

c) Benutzen Sie jetzt den Befehl `rowSums()`, um den Vektor

$$\xi \;=\; \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix} \phi_1^2 + \phi_2^2 + \cdots + \phi_n^2 \\ \phi_{n+1}^2 + \phi_{n+2}^2 + \cdots + \phi_{2n}^2 \\ \phi_{2n+1}^2 + \phi_{2n+2}^2 + \cdots + \phi_{3n}^2 \\ \vdots \\ \phi_{(N-1)n+1}^2 + \phi_{(N-1)n+2}^2 + \cdots + \phi_{Nn}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

zu generieren. Erstellen Sie ein Histogramm der relativen Häufigkeiten der Zufallszahlen $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$, indem Sie den Befehl `hist(ξ,prob=TRUE,breaks=20)` eingeben.

d) Addieren Sie jetzt zu dem Plot aus (c) einen Plot der Dichte-Funktion $p_{\chi_n^2}$, etwa in rot. Das Histogramm und diese Dichte-Funktion sollten dann also in etwa übereinstimmen.

e) Wiederholen Sie die Schritte aus (b-d) für, etwa, $n = 3$ und $n = 10$, um nicht nur die Aussage $A(5)$, sondern ebenfalls die Aussagen $A(3)$ und $A(10)$ zu überprüfen.

Aufgabe 2: Verifizieren Sie durch eine geeignete R-Simulation folgende Aussagen:

a) Sind ϕ_0 und $\phi_1, \cdots \phi_n$ unabhängige, standard-normalverteilte Zufallszahlen, dann ist

$$y \;:=\; \frac{\phi_0}{\sqrt{\frac{\phi_1^2+\cdots+\phi_n^2}{n}}}$$

t_n-verteilt.

b) Sind $\phi_1, \cdots, \phi_k$ und $\phi_{k+1}, \cdots, \phi_{k+\ell}$ unabhängige, standard-normalverteilte Zufallszahlen, dann ist

$$y \;:=\; \frac{\frac{\phi_1^2+\cdots+\phi_k^2}{k}}{\frac{\phi_{k+1}^2+\cdots+\phi_{k+\ell}^2}{\ell}}$$

$F_{k,\ell}$-verteilt.