

Lösungen Übungsblatt 7 Ökonometrie

Aufgabe 1: a) Wir können die Varianz einer Zufallsvariablen Z mit der Formel

$$V[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2$$

berechnen. Wir haben

$$\begin{aligned} E[\{\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n)\}^2] &= n^2 \times E\left[\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}\right]^2 \\ &= n^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} d^n x \\ &\stackrel{\text{Blatt6,1d}}{=} n^2 \int_0^\infty \frac{1}{y^2} \lambda^n e^{-\lambda y} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} dy \\ &= \frac{n^2}{(n-1)!} \int_0^\infty y^{n-3} \lambda^n e^{-\lambda y} dy \\ &= \frac{n^2 \lambda^2}{(n-1)!} \int_0^\infty x^{n-3} e^{-x} dx \\ &\stackrel{\text{Blatt6,1e}}{=} \frac{n^2 \lambda^2}{(n-1)!} \times (n-3)! = \frac{n^2 \lambda^2}{(n-1)(n-2)} \times \lambda^2 \end{aligned}$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned} V[\{\hat{\lambda}_{\text{ML}}^2\}] &= \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} \lambda^2 - \frac{n^2}{(n-1)^2} \lambda^2 \\ &= \frac{n^2}{n-1} \left\{ \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right\} \times \lambda^2 \\ &= \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \lambda^2 \end{aligned}$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} \text{Prob}[\hat{\lambda}_{\text{ML}} \in [x, x + dx)] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \chi(\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n) \in [x, x + dx]) \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} dx_i \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \chi\left(\frac{1}{n \sum_{i=1}^n x_i} \in [x, x + dx]\right) \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} d^n x \\ &\stackrel{\text{Blatt6,1d}}{=} \int_0^\infty \chi\left(\frac{n}{y} \in [x, x + dx]\right) \lambda^n e^{-\lambda y} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} dy \\ &\stackrel{x:=\frac{n}{y} \Leftrightarrow y=\frac{n}{x}}{=} \int_0^\infty \chi(x \in [x, x + dx]) \lambda^n e^{-\frac{n\lambda}{x}} \frac{(n/x)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{n dx}{x^2} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{(n\lambda)^n}{x^{n+1}} e^{-\frac{n\lambda}{x}} dx . \end{aligned}$$