Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2016/17

Lösungen Übungsblatt 6 Ökonometrie

Aufgabe 1: **a)** Die Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
L(\{x_i\},\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} \mathsf{Prob}\big[\, x_i \in [x_i, x_i+dx_i)\,\big] \\
&= \prod_{i=1}^{n} \lambda\, e^{-\lambda x_i}\, dx_i \;=\; \lambda^n\, e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}\, d^n x
\end{aligned}$$

und für den Logarithmus erhalten wir

$$\begin{aligned}
\log L(\{x_i\},\lambda) &= \log\Big[\, \lambda^n\, e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}\, d^n x \,\Big] \\
&= n\log\lambda \;-\; \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \;+\; \text{const} \\
&=: F(\lambda) \;+\; \text{const}
\end{aligned}$$

wobei die Konstante const nur von λ unabhängige Terme enthält. Wir maximieren F:

$$\begin{aligned}
F'(\lambda) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i \;\stackrel{!}{=}\; 0 \\
\lambda &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}
\end{aligned}$$

also ist der Maximum-Likelihood-Schätzer gegeben durch

$$\hat{\lambda}_{\rm ML}(x_1,...,x_n) \;=\; \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i}$$

b) Der Erwartungswert von $\hat{\lambda}_{\rm ML}$ muss gleich λ sein. Der Der Erwartungswert von $\hat{\lambda}_{\rm ML}$ ist durch folgendes Integral gegeben:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[\,\hat{\lambda}_{\rm ML}(x_1,...,x_n)\,\big] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \hat{\lambda}_{\rm ML}(x_1,...,x_n) \prod_{i=1}^n \lambda\, e^{-\lambda x_i}\, dx_i \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i}\; \lambda^n\; e^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i}\; d^n x \;\stackrel{?}{=}\; \lambda
\end{aligned}$$

c) Mit der Formel aus Teil (d) erhalten wir

$$\mathsf{E}\big[\,\hat{\lambda}_{\rm ML}(x_1,...,x_n)\,\big] \;=\; \int_0^\infty \frac{1}{\frac{1}{n}\,y}\; \lambda^n\; e^{-\lambda y}\; \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\, dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty y^{n-2}\, e^{-\lambda y}\, dy \\
&\overset{x=\lambda y}{=} \frac{n\lambda}{(n-1)!} \int_0^\infty x^{n-2}\, e^{-x}\, dx \\
&\overset{(e)}{=} \frac{n\lambda}{(n-1)!}\,(n-2)! \;=\; \frac{n}{n-1}\,\lambda\,,
\end{aligned}
$$

also ist

$$
\hat{\lambda}_{\mathrm{mod}}(x_1,...,x_n) \;:=\; \frac{n-1}{n}\,\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1,...,x_n) \;=\; \frac{1}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n x_i}
$$

ein erwartungstreuer Schätzer.

d) Wir substituieren

$$
\begin{aligned}
y_n &:= x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n \\
y_{n-1} &:= x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \\
&\;\vdots \\
y_2 &:= x_1 + x_2 \\
y_1 &:= x_1
\end{aligned}
$$

was äquivalent ist zu

$$
\begin{aligned}
y_n - y_{n-1} &= x_n \\
y_{n-1} - y_{n-2} &= x_{n-1} \\
&\;\vdots \\
y_2 - y_1 &= x_2 \\
y_1 &= x_1
\end{aligned} \tag{1}
$$

Der Integrationsbereich $(0,\infty)^n$ transformiert sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
x_n &\in (0,\infty) \\
x_{n-1} &\in (0,\infty) \\
&\;\vdots \\
x_2 &\in (0,\infty) \\
x_1 &\in (0,\infty)
\end{aligned}
$$

ist äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
y_n &\in (0,\infty) \\
y_{n-1} &\in (0,y_n) \\
y_{n-2} &\in (0,y_{n-1}) \\
&\;\vdots \\
y_2 &\in (0,y_3) \\
y_1 &\in (0,y_2)
\end{aligned}
$$

Die Funktionaldeterminante det $\frac{\partial x}{\partial y}$ ist gleich 1, da es eine Dreicksmatrix ist mit lauter Einsen auf der Hauptdiagonale. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n \\
&\qquad = \int_0^\infty dy_n \int_0^{y_n} dy_{n-1} \cdots \int_0^{y_4} dy_3 \int_0^{y_3} dy_2 \int_0^{y_2} dy_1\; f(y_n) \\
&\qquad = \int_0^\infty dy_n \int_0^{y_n} dy_{n-1} \cdots \int_0^{y_4} dy_3 \int_0^{y_3} dy_2\; y_2\; f(y_n) \\
&\qquad = \int_0^\infty dy_n \int_0^{y_n} dy_{n-1} \cdots \int_0^{y_4} dy_3\; \frac{y_3^2}{2}\; f(y_n) \\
&\qquad = \int_0^\infty dy_n \int_0^{y_n} dy_{n-1} \cdots \int_0^{y_5} dy_4\; \frac{y_4^3}{3!}\; f(y_n) \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad = \int_0^\infty dy_n\; \frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!}\; f(y_n)
\end{aligned}$$

e) Mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty y^m\, e^{-y}\, dy &= y^m(-e^{-y})\Big|_0^\infty \;-\; \int_0^\infty m y^{m-1}\, (-e^{-y})\, dy \\
&= 0 \;+\; m \int_0^\infty y^{m-1}\, e^{-y}\, dy \\
&= m(m-1) \int_0^\infty y^{m-2}\, e^{-y}\, dy \\
&\;\;\vdots \\
&= m(m-1)\cdots 2\cdot 1 \int_0^\infty y^0\, e^{-y}\, dy \\
&= m! \int_0^\infty e^{-y}\, dy \;=\; m!
\end{aligned}$$